

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé 2

Exercice 1. Familles d'applications transitives

Soit $(U_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une base d'ouverts de X . Pour tous $k, i \in \mathbf{N}$, l'ensemble

$$A_{i,k} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} f_i^{-n}(U_k)$$

est un ouvert dense, par transitivité des f_i . Dès lors l'ensemble

$$Y = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_{i,k}$$

est dense, par le théorème de Baire, puisque X est localement compact. Tout élément $y \in Y$ vérifie donc que son orbite $\mathcal{O}_+(y)$ est dense dans X . Comme X est séparé et qu'il n'a pas de points isolés, cela implique que pour tout $p \geq 1$, l'ensemble

$$\mathcal{O}_{+,p}(y) = \{f^k(y) : k \geq p\}$$

est dense (en effet, dans un espace séparé et sans points isolés, si une suite $\{u_n : n \geq 0\}$ est dense, alors la suite $\{u_n : n \geq 1\}$ est aussi dense). Ainsi on a que

$$y \in \bigcap_{p \geq 1} \overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)} = \omega(y),$$

c'est-à-dire y est récurrent.

Exercice 2. Transformations minimales

1. Soient U, V deux ouverts non vides, et $Y = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f^n(V)}$. Alors Y est fermé et $f(Y) \subset Y$; ainsi $Y = X$ et il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n(U) \cap V = \emptyset$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{F \subset X, F \text{ est un fermé non vide tel que } f(F) \subset F\}$. Alors \mathcal{F} est partiellement ordonné pour l'inclusion. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ une famille totalement ordonnée. Alors

$$G = \bigcap_{F \in \mathcal{C}} F$$

est non vide. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $X = \bigcup_F \complement F$ et par compacité, il existe $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{C}$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^N \complement F_i.$$

Par suite $\bigcap_{j=1}^N F_j = \emptyset$, ce qui est absurde puisque la famille $\{F_1, \dots, F_N\}$ est totalement ordonnée.

Ainsi G est non vide et c'est un minorant pour \mathcal{C} . Par le lemme de Zorn, il existe un élément minimal de \mathcal{F} , noté Y . Soit $F \subset Y$ un fermé non vide tel que $f(F) \subset F$. Alors $F = Y$ par minimalité de Y et donc $f|_Y$ est minimale.

3. Soit $f : X \rightarrow X$ continue. Alors par la questions précédente, f admet une partie fermée minimale non vide Y . Soit $y \in Y$ et $p \geq 1$; on considère $\mathcal{O}_{+,p}(y) = \{f^n(y) : n \geq p\}$. Alors $\overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)}$ est une partie fermée non vide de Y , invariante par f . Par minimalité de $f|_Y$, $\overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)} = Y$ et en particulier

$$y \in \bigcap_{p \geq 1} \overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)} = \omega(y).$$

Exercice 3. Ensemble non-errant

1. Supposons que pour tout $n > m$, $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Alors x n'est pas périodique et il existe un voisinage V de x tel que $f^j(V) \cap V = \emptyset$ pour tout $j = 1, \dots, m$ (en effet, on peut choisir des voisinages U_i de $f^i(x)$ pour $i = 0, \dots, m$, qui sont deux à deux disjoints, et considérer $V = \bigcap_i f^{-i}(U_i)$) Quitte à réduire V , on peut supposer $V \subset U$. On a donc $f^k(V) \cap V = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et $x \notin \Omega(f)$.

2. Soit $x \notin \Omega(f)$ et U un voisinage ouvert de x tel que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Alors tout $y \in U$ est errant, et donc $\Omega(f)$ est fermé. Pour l'invariance, on raisonne par contraposition. Si $x \in X$ vérifie que $f(x) \notin \Omega(f)$, alors on peut trouver un voisinage U de $f(x)$ tel que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Mais alors $V = f^{-1}(U)$ est un voisinage de x et on a

$$f(f^n(V) \cap V) \subset f^{n+1}(f^{-1}(U)) \cap U \subset f^n(U) \cap U = \emptyset$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que $f^n(V) \cap V = \emptyset$. Donc $x \notin \Omega(f)$.

Enfin, soit $x \in X$ et $y \in \omega(x)$. Soit U un voisinage ouvert de y . Alors il existe $m > n > 0$ tels que $f^m(x), f^n(x) \in U$. Il suit que $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$, donc $y \in \Omega(f)$.

3. Pour $x \in \text{Per}(f)$, l'orbite $\mathcal{O}_+(x)$ est un ensemble minimal et donc $\text{Per}(f) \subset M(f)$.

Soit $F \subset X$ un sous-ensemble minimal pour f . Alors tout point de F est récurrent (cf. la question 3. de l'Exercice 2.) et donc $M(f) \subset R(f)$.

Si x est récurrent, on a $x \in \omega(x) \subset \Omega(f)$. Comme $\Omega(f)$ est fermé, on a $R(f) \subset \Omega(f)$.

Exercice 4. Entropie d'un flot

La compacité de X et la continuité de $\Phi|_{[0,1] \times X}$ donnent

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x, y \in X, \quad \text{dist}(x, y) \leq \delta(\varepsilon) \implies d_1^\Phi(x, y) \leq \varepsilon.$$

Pour $f : X \rightarrow X$, on rappelle que

$$d_n^f(x, y) = \max\{d(f^k(x), f^k(y)), k = 0, \dots, n-1\}.$$

De plus, on peut supposer que $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, puisque $d_T^\Phi \geq d_{[T]}^{\varphi^1}$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 1$

$$B_{d_{[T]}^{\varphi^1}}(x, \varepsilon) \supset B_{d_T^\Phi}(x, \varepsilon) \supset B_{d_{[T]}^{\varphi^1}}(x, \delta(\varepsilon)).$$

Ainsi, en notant pour toute application $f : X \rightarrow X$

$$M^f(n, \varepsilon) = \min \left\{ m \geq 1, \exists x_1, \dots, x_m \in X, \bigcup_{i=1}^m B_{d_n^f}(x_i, \varepsilon) = X \right\},$$

on a

$$M^{\varphi^1}(\lfloor T \rfloor, \varepsilon) \leq M^\Phi(T, \varepsilon) \leq M^{\varphi^1}(\lfloor T \rfloor, \delta(\varepsilon)),$$

où $M^\Phi(T, \varepsilon)$ est défini comme $M^f(n, \varepsilon)$ en remplaçant d_n^f par d_T^Φ . Il suit que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log M^{\varphi^1}(n, \varepsilon) \leq \limsup_T \frac{1}{T} \log M^\Phi(T, \varepsilon) \leq \limsup_n \frac{1}{n} \log M^{\varphi^1}(n, \delta(\varepsilon)),$$

ce qui conclut.

Exercice 5. Propriétés de l'entropie topologique

On définit comme dans le cours, pour tout $f : X \rightarrow X$, tout $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$C^f(n, \varepsilon) = \min \left\{ m \geq 1, \exists U_1, \dots, U_m \subset X, \forall j, \text{diam}_{d_n^f}(U_j) \leq \varepsilon, X \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \right\},$$

et

$$N^f(n, \varepsilon) = \max \left\{ m \in \mathbf{N}, \exists x_1, \dots, x_m \in X, \forall i \neq j, d_n^f(x_i, x_j) \leq \varepsilon \right\}.$$

1. On a $C^f(n, \varepsilon) \geq C^{f|_\Lambda}(n, \varepsilon)$ pour tous n, ε , ce qui conclut.
2. Par la question précédente on a $h_{\text{top}}(f_j) \leq h_{\text{top}}(f)$ pour tout j . De plus, on a que

$$C^f(n, \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^m C^{f|_{\Lambda_i}}(n, \varepsilon).$$

Ceci implique qu'il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$C^{f|_{\Lambda_i}}(n, \varepsilon) \geq \frac{1}{m} C^f(n, \varepsilon),$$

qui vérifie donc $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_i}) \geq h_{\text{top}}(f)$.

3. On a que $d_n^{f^m} \leq d_{mn-m+1}^f$ pour tous $m, n \geq 1$. Par suite, $M^{f^m}(n, \varepsilon) \leq M^f(mn - m + 1, \varepsilon) \leq M^f(mn, \varepsilon)$.

Par continuité de f , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $B(x, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_m^f}(x, \varepsilon)$. Alors

$$\begin{aligned} B_{d_n^{f^m}}(x, \delta(\varepsilon)) &= \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-im} B(f^{im}(x), \delta(\varepsilon)) \\ &\subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-im} B_{d_m^f}(f^{im}(x), \varepsilon) \\ &= B_{d_{mn}^f}(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé que

$$B_{d_n^f}(x) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k} B(f^k(x), \varepsilon).$$

Il suit que $M^{f^m}(n, \delta(\varepsilon)) \geq M^f(mn, \varepsilon)$, et donc

$$M^f(mn, \varepsilon) \leq M^{f^m}(n, \delta(\varepsilon)) \leq M^f(mn, \delta(\varepsilon)),$$

ce qui donne $h_{\text{top}}(f^m) = m h_{\text{top}}(f)$.

Si f est inversible on a $B_{d_n^f}(x, \varepsilon) = B_{d_n^{f^{-1}}}(f^{n-1}(x), \varepsilon)$ pour tous n, x, ε , ce qui conclut.

4. On a que $\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, d')$ est un homéomorphisme puisque d et d' engendrent la même topologie. De plus $f \circ \text{id} = \text{id} \circ f$ donc les systèmes dynamiques topologiques (X, d, f) et (X, d', f) sont conjugués. Cela conclut par un théorème du cours.
5. On a que $B_{d_n^{f \times g}}((x, y), \varepsilon) = B_{d_n^f}(x, \varepsilon) \times B_{d_n^g}(y, \varepsilon)$. Ceci implique que $M^{f \times g}(n, \varepsilon) \leq M^f(n, \varepsilon)M^g(n, \varepsilon)$, et donc $h_{\text{top}}(f \times g) \leq h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g)$.

Soient $x_1, \dots, x_m \in X$ (resp. $y_1, \dots, y_p \in Y$) tels que pour tous $1 \leq i \neq i' \leq m$ (resp. $1 \leq j \neq j' \leq p$) on ait $d_n^f(x_i, x_{i'}) \geq \varepsilon$ (resp. $d_n^g(y_j, y_{j'}) \geq \varepsilon$). Alors pour tous $(i, j) \neq (i', j')$ on a

$$d_n^{f \times g}((x_i, y_j), (x_{i'}, y_{j'})) \geq \varepsilon.$$

Par conséquent $N^{f \times g}(n, \varepsilon) \geq N^f(n, \varepsilon)N^g(n, \varepsilon)$, et donc $h_{\text{top}}(f \times g) \geq h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g)$.

Exercice 6. Entropie des transformations Lipschitziennes

1. Soit $n \geq 1$. Il existe $c > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$c^{-1}\varepsilon^{-n} \leq M([0, 1]^n, \varepsilon) \leq c\varepsilon^{-n}.$$

Par suite

$$\frac{-c + n \log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{\log M([0, 1]^n, \varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{n \log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon},$$

ce qui conclut.

2. Soit $L > \max(1, L(f))$. Alors $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Cela implique que

$$f^m(B(x, \varepsilon/L^n)) \subset B(f^m(x), \varepsilon), \quad 0 \leq m \leq n,$$

et donc

$$B(x, \varepsilon/L^n) \subset \bigcap_{m=0}^{n-1} f^{-m}B(f^m(x), \varepsilon) = B_{d_n^f}(x, \varepsilon), \quad \forall x, \varepsilon.$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log M^f(n, \varepsilon) &\leq \frac{1}{n} \log M(X, \varepsilon/L^n) \\ &= \frac{\log(L^n/\varepsilon) \log M(X, \varepsilon/L^n)}{n \log(L^n/\varepsilon)} \\ &= \left(\log L - \frac{\log \varepsilon}{n} \right) \frac{\log M(X, \varepsilon/L^n)}{\log(L^n/\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Puisque $\log L > 0$ on obtient

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log M^f(n, \varepsilon) \leq \log(L) \text{bdim}(X),$$

et donc $h_{\text{top}}(f) \leq \log(L) \text{bdim}(X)$.

3. Par le cours, l'application doublante $E_2 : [x] \mapsto [2x]$ sur $X = S^1$ satisfait cette égalité, puisque $\text{bdim}(S^1) = 1$, et $h_{\text{top}}(E_2) = \log 2$.

Exercice 7. Entropie algébrique

1. Soit $i \in \{1, \dots, s\}$. et $m, n \geq 0$. Alors $F^n(\gamma_i)$ peut s'écrire

$$F^n(\gamma_i) = \lambda_1 \cdots \lambda_{L(n, \Gamma)}, \quad \lambda_j \in \Gamma.$$

On a donc

$$F^{m+n}(\gamma_i) = F^m(\lambda_1) \cdots F^m(\lambda_{L(n, \Gamma)}).$$

Chaque $F^m(\lambda_j)$ peut s'écrire comme un produit d'éléments Γ de $L(m, \Gamma)$ termes. Ceci montre que

$$L_{n+m}(F, \Gamma) \leq L_n(F, \Gamma)L_m(F, \Gamma).$$

Ainsi la suite $(\log L_n(F, \Gamma))_n$ est sous-additive, ce qui conclut.

2. Soit $\Gamma' = \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_r\}$ est un autre système de générateurs. Soient

$$k = \max_{1 \leq j \leq r} L(\gamma'_j, \Gamma), \quad k' = \max_{1 \leq i \leq s} L(\gamma_i, \Gamma').$$

Alors pour tout $g \in G$ on a

$$L(g, \Gamma) \leq k' L(g, \Gamma') \leq k k' L(g, \Gamma).$$

En particulier $L_n(F, \Gamma) \leq k' L_n(F, \Gamma') \leq k k' L_n(F, \Gamma)$, ce qui conclut.

3. Soit Γ un système de générateurs de G . Alors on a

$$L_n(I_{\gamma_0} F, \Gamma) - 2c \leq L_n(F, \Gamma) \leq L_n(I_{\gamma_0} F, \Gamma) + 2c$$

où $c = \max(L(\gamma_0, \Gamma), L(\gamma_0^{-1}, \Gamma))$. Cela conclut.

4. Soit $x'_\star \in X$ un autre point base et α' un chemin joignant x'_\star à $f(x'_\star)$. Soit $G' = \pi_1(M, x'_\star)$. Soit β un chemin joignant x_\star à x'_\star . Alors l'application $\psi : G \rightarrow G'$ définie par $\psi(\gamma) = \beta^{-1} \gamma \beta$ est un isomorphisme de groupes. On a

$$\begin{aligned} F_{x_\star, \alpha}(\gamma) &= \alpha^{-1} (f \circ \gamma) \alpha \\ &= \alpha^{-1} (f \circ \beta)^{-1} (f \circ \beta) (f \circ \gamma) (f \circ \beta)^{-1} (f \circ \beta) \alpha \\ &= \alpha^{-1} (f \circ \beta)^{-1} \alpha' \alpha'^{-1} (f \circ (\beta \gamma \beta^{-1})) \alpha' \alpha'^{-1} (f \circ \beta) \alpha, \end{aligned}$$

ce qui montre que $F_{x_\star, \alpha} = \phi^{-1} F_{x'_\star, \alpha'} \psi$ où $\phi : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de la forme $\gamma \mapsto \beta'^{-1} \gamma \beta'$ où β' est un chemin joignant x_\star à x'_\star . En procédant comme à la question précédente, on conclut.