

SYSTÈMES DYNAMIQUES

Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Familles d'applications transitives

Soit X un espace topologique séparé, à base dénombrable, localement compact et sans points isolés. Soit $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille d'applications continues et topologiquement transitives. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\omega_{f_i}(x) = X$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

Exercice 2. Transformations minimales

Soit X un espace topologique séparé. On dira qu'une transformation continue $f : X \rightarrow X$ est *minimale* si pour tout fermé non vide $Y \subset X$ on a

$$f(Y) \subset Y \implies Y = X.$$

On dira qu'une partie fermée invariante $Y \subset X$ est *minimale* pour f si $f|_Y : Y \rightarrow Y$ est minimale.

1. Montrer que si X est compact, toute transformation minimale de X est topologiquement transitive.
2. En utilisant l'axiome du choix, montrer que si X est compact, alors toute transformation continue de X admet une partie fermée minimale non vide.
3. En déduire que si X est compact, alors toute application continue de X a un point positivement récurrent.

Exercice 3. Ensemble non-errant

Soit X un espace topologique séparé et $f : X \rightarrow X$ une transformation continue. On dira que $x \in X$ est *non errant* si pour tout voisinage U de x , il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. On note $\Omega(f)$ l'ensemble des points non errants.

1. Montrer que si $x \in X$ est non errant et U un voisinage de x , alors pour tout $m \in \mathbf{N}$ il existe $n > m$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.
2. Montrer que $\Omega(f)$ est un fermé invariant et qu'il contient tous les ensembles ω -limites (et α -limites si f est inversible) de tous les points.
3. Montrer que l'on a

$$\text{Per}(f) \subset M(f) \subset R(f) \subset \Omega(f),$$

où $\text{Per}(f)$ est l'ensemble des points périodiques de f , $M(f)$ est la fermeture de l'union de toutes les parties minimales pour f et $R(f)$ est la fermeture de l'ensemble des points récurrents pour f .

Exercice 4. Entropie d'un flot

Soit (X, d) un espace métrique compact et $\Phi = \{\varphi^t\}_{t \in \mathbf{R}}$ un flot continu sur X . On définit l'entropie $h_{\text{top}}(\Phi)$ du flot Φ de la même manière que dans le cas discret, en considérant les distances

$$d_T(x, y) = \max_{0 \leq t \leq T-1} d(\varphi^t(x), \varphi^t(y)).$$

Montrer que

$$h_{\text{top}}(\Phi) = h_{\text{top}}(\varphi^1).$$

Exercice 5. Propriétés de l'entropie topologique

Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ des espaces métriques compacts et des transformations continues $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$.

1. Soit $\Lambda \subset X$ un fermé f -invariant. Montrer que $h_{\text{top}}(f|_{\Lambda}) \leq h_{\text{top}}(f)$.
2. Soient $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ des fermés f -invariants de X tels que $X = \bigcup_{j=1}^m \Lambda_j$. Montrer que $h_{\text{top}}(f) = \max_{1 \leq j \leq m} h_{\text{top}}(f|_{\Lambda_j})$.
3. Montrer que $h_{\text{top}}(f^k) = |k| h_{\text{top}}(f)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$ ($k \in \mathbf{N}$ si f n'est pas inversible).
4. Montrer que si d'_X est une autre métrique sur X engendrant la même topologie que d_X , alors $h_{\text{top}}^{d'_X}(f) = h_{\text{top}}^{d_X}(f)$.
5. Montrer que $h_{\text{top}}(f \times g) = h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g)$ où $f \times g : X \times Y \rightarrow X \times Y$ est donnée par $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ et où $X \times Y$ est muni de la distance $d_{X \times Y}((x, y), (x', y')) = \max(d_X(x, x'), d_Y(y, y'))$.

Exercice 6. Entropie des transformations Lipschitziennes

Soit (X, d) un espace métrique compact. On définit

$$\text{bdim}(X) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log M(X, \varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}$$

où $M(X, \varepsilon)$ est le nombre minimal de ε -boules (pour la distance d) qu'il faut pour recouvrir X .

1. Montrer que $\text{bdim}([0, 1]^n) = n$.

Soit $f : X \rightarrow X$ une application Lipschitzienne et

$$L(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}$$

sa constante de Lipschitz.

2. Montrer que

$$h_{\text{top}}(f) \leq \text{bdim}(X) \max(0, \log L(f)). \quad (1)$$

3. Donner un exemple d'application f telle que (1) soit une égalité.

Exercice 7. Entropie algébrique

Soit G un groupe finiment engendré et $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ un système de générateur. Pour $\gamma \in G$ on définit

$$L(\gamma, \Gamma) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{ks} |i_j| \mid \gamma = \gamma_1^{i_1} \dots \gamma_s^{i_s} \gamma_1^{i_{s+1}} \dots \gamma_s^{i_{2s}} \dots \gamma_s^{i_{ks}}, i_j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Si $F \in \text{Hom}(G, G)$ est un morphisme de groupe on note

$$L_n(F, \Gamma) = \max_{1 \leq i \leq s} L(F^n \gamma_i, \Gamma), \quad n \in \mathbf{N}.$$

1. Montrer que la limite

$$h(F, \Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log L_n(F, \Gamma)$$

existe.

2. Montrer que si Γ' est un autre système de générateurs, alors $h(F, \Gamma) = h(F, \Gamma')$.

On définit l'entropie algébrique $h_{\text{alg}}(f)$ de f par $h_{\text{alg}}(f) = h(F, \Gamma)$ pour n'importe quel système de générateur Γ .

3. Montrer que $h_{\text{alg}}(I_{\gamma_0} f) = h_{\text{alg}}(f)$ pour tout $\gamma_0 \in G$ où $I_{\gamma_0} \in \text{Hom}(G, G)$ est défini par $I_{\gamma_0}(\gamma) = \gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0$.

Soit M une variété connexe compacte, $x_* \in M$ et $G = \pi_1(M, x_*)$. Soit α un chemin dans M joignant x_* à $f(x_*)$. Soit f une transformation continue de M ; on définit $F_{x_*, \alpha} \in \text{Hom}(G, G)$ par

$$F_{x_*, \alpha} \gamma = \alpha^{-1} (f \circ \gamma) \alpha.$$

4. On admet que G est finiment engendré. Montrer que $h_{\text{alg}}(F_{x_*, \alpha})$ ne dépend pas des choix de x_* et de α .

Le nombre $h_{\text{alg}}(f)$ défini par $h_{\text{alg}}(f) = h_{\text{alg}}(F_{x_*, \alpha})$ pour n'importe quel choix de x_*, α est appelé entropie algébrique de f . On peut montrer que

$$h_{\text{alg}}(f) \leq h_{\text{top}}(f).$$