École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Corrigé 6

Dans toute la suite, si p est un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme f d'une variété M, on note $W^u(f,p)$ et $W^s(f,p)$ (resp. $W^u_{\mathrm{loc}}(f,p)$ et $W^s_{\mathrm{loc}}(f,p)$) les variétés instables et stables globales (resp. locales) de p.

Exercice 1. *Variété stable locale*

1. L'énoncé est le suivant. Soit A un isomorphisme hyperbolique de $\mathbf{R}^n$, $E = E^s \oplus E^u$ sa décomposition stable/instable, et π_s, π_u les projecteurs associés. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^n$ adaptée à A, c'est-à-dire
$$\|x\| = \max\left(\|\pi_s(x)\|_s, \|\pi_u(x)\|_u\right), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$
où $\|\cdot\|_s$ et $\|\cdot\|_u$ sont des normes sur E^s et E^u telles que pour un $a<1$ on a
$$\|A|_{E^s}\|_s \leq a, \quad \left\|(A|_{E^u})^{-1}\right\|_u \leq a.$$
Soit $r>0$ et $B = \bar{B}(0,r) = B_s \times B_u$ la boule de rayon r pour $\|\cdot\|$. Soit $\eta : B \to \mathbf{R}^n$ une application qui est Lipschitzienne avec constante de Lipschitz $\kappa < (1-a)$ et telle que $\eta(0) = 0$. Alors il existe une unique application $h : B_s \to B_u$ telle que
$$\mathrm{Graphe}(h) \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x_s, h(x_s)),\ x_s \in B_s\} = \left\{(x_s,x_u) \in B,\ (A+\eta)^n(x_s,x_u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}.$$
De plus, h est Lipschitz, et $\mathcal{C}^1$ si η l'est.

2. Le problème étant local, on peut supposer que f est un difféomorphisme $U \to V$ où U et V sont des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^n$, et $p=0$, de sorte qu'en notant $A = (\mathrm{d}f)_0$ et $\eta = f - (\mathrm{d}f)_0$ on se ramène à la situation du théorème précédent. On rappelle que l'application h du théorème précédent est obtenue de la manière suivante. Soit $\mathcal{S}_0(B)$ les suites à valeurs dans B et $\chi : B_s \times \mathcal{S}_0(B) \to \mathcal{S}_0(B)$ définie par
$$\chi(x_s,\gamma)(n) = \begin{cases} \left(x_s,\ A_u^{-1}[\gamma_u(1) - \eta_u\gamma(0)]\right) & \text{si } n=0, \\ \left((A+\eta)_s\gamma(n-1),\ A_u^{-1}[\gamma_u(n+1) - \eta_u\gamma(n)]\right) & \text{si } n>0, \end{cases} \tag{1}$$
pour tout $\gamma = (\gamma(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $x_s \in B_s$. Ici on a noté $A_u = A|_{E^u}$, $\eta_u = \pi_u \circ \eta$, $(A+\eta)_s = \pi_s \circ (A+\eta)$ et $\gamma_u = \pi_u \circ \gamma$. Alors (voir la démonstration du théorème) il existe une unique application $g : B_s \to \mathcal{S}_0(B)$ telle que
$$g(x_s) = \chi(x_s, g(x_s)), \quad x_s \in B_s. \tag{2}$$

L'application h est alors donnée par $h(x_s) = \pi_u[g(x_s)(0)]$.

En différenciant, il vient

$$(\mathrm{d}g)_0(x_s) = (\mathrm{d}\chi)_{(0,0)}\Big(x_s,\ (\mathrm{d}g)_0(x_s)\Big). \tag{3}$$

En différenciant χ au point $(0,0) \in B_s \times \mathcal{S}_0(B)$, on voit aussi que $\mathrm{d}\chi_{(0,0)} = \tilde{\chi}$, où $\tilde{\chi}$ est définie comme χ en remplaąnt η par $(\mathrm{d}\eta)_0$ dans l'équation (1).

Par unicité de l'équation (2) (en remplaąnt χ par $\tilde{\chi}$), et par (3), on obtient que la variété stable de $A+(\mathrm{d}\eta)_0$ est donnée par le graphe de $x_s \mapsto \pi_u[(\mathrm{d}g)_0(x_s)(0)]$ (car $\mathrm{d}(\pi_u \circ g) = \pi_u \circ \mathrm{d}g$ puisque π_u est linéaire), c'est à dire par le graphe de $x_s \mapsto (\mathrm{d}h)_0(x_s)$ qui est par définition l'espace tangent de la variété stable locale de $A+\eta$ en 0.

Or, la variété stable de l'application linéaire $A+(\mathrm{d}\eta)_0$ est l'espace stable de $A+(\mathrm{d}\eta)_0$; cela conclut puisque, avec les identifications faites au début de la question, on a $A+(\mathrm{d}\eta)_0 = (\mathrm{d}f)_0$.

3. On se ramène au cas où $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ et $f(0) = 0$. Soit $\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$ la décomposition stable et instable associée à $\mathrm{d}f_0$. On reprend les notations de la question précédente et on note $h_s : B_s \to B_u$ et $h_u : B_u \to B_s$ les applications dont les graphes sont les variétés stables et instables locales, et on définit $\psi_{s/u} : B_{s/u} \to B_s \times B_u$ par

$$\psi_s(x_s) = (x_s, h_s(x_s)), \quad \psi_u(x_u) = (h_u(x_u), x_u), \quad (x_s, x_u) \in B_s \times B_u.$$

Alors $\psi_{s/u}$ est un difféomorphisme local $B_{s/u} \to W^{s/u}_{\mathrm{loc}}(f,0)$. On définit $\varphi : B_s \times B_u \to \mathbf{R}^n$ par

$$\varphi(x_s, x_u) = \psi_s(x_s) + \psi_u(x_u), \quad (x_s, x_u) \in B_s \times B_u.$$

Alors φ est un difféomorphisme local (sa différentielle est injective en 0) qui vérifie les conditions demandées. Quitte à identifier E^s avec $\mathbf{R}^r$ et E^u avec $\mathbf{R}^{n-r}$, on a les conditions demandées.

4. On écrit $\tilde{f}(x) = \mathrm{d}\tilde{f}_0(x) + \tilde{\eta}(x)$ où $\tilde{\eta}(x) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$. Alors (ici $\|\cdot\|_s$ est une norme adaptée pour $\mathrm{d}\tilde{f}_0$ qui est contractante sur $\mathbf{R}^r \times \{0\}$)

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{f}(\tilde{x}_s) - \tilde{f}(\tilde{y}_s)\right\|_s &\le \left\|\mathrm{d}\tilde{f}_0(\tilde{x}_s - \tilde{y}_s)\right\|_s + \|\tilde{\eta}_s(\tilde{x}_s) - \tilde{\eta}_s(\tilde{y}_s)\|_s \\ &\le a\|\tilde{x}_s - \tilde{y}_s\|_s + \varepsilon\|\tilde{x}_s - \tilde{y}_s\|_s,\end{aligned}$$

pour tout $\tilde{x}_s, \tilde{y}_s \in \mathbf{R}^r \times \{0\}$ assez proches de 0, où $0 < a < 1$ et $\varepsilon > 0$ vérifient $a + \varepsilon < 1$. On peut itérer ce raisonnement pour obtenir que

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{f}^n(\tilde{x}_s) - \tilde{f}^n(\tilde{y}_s)\right\| &\le C\left\|\tilde{f}^n(\tilde{x}_s) - \tilde{f}^n(\tilde{y}_s)\right\|_s \\ &\le C(a+\varepsilon)\left\|\tilde{f}^{n-1}(\tilde{x}_s) - \tilde{f}^{n-1}(\tilde{x}_u)\right\|_s \\ &\le \cdots \\ &\le C(a+\varepsilon)^n\|\tilde{x}_s - \tilde{y}_s\|_s \\ &\le C^2(a+\varepsilon)^n\|\tilde{x}_s - \tilde{y}_s\|,\end{aligned}$$

où $\|\cdot\| \le C\|\cdot\|_s \le C^2\|\cdot\|$.

Exercice 2. *Intérieur de la variété stable*

On a que

$$W^s(f,p) = \bigcup_{N \ge 0} f^{-N}\left(\overline{W}^s_{\mathrm{loc}}(f,p)\right).$$

Pour tout $N \geq 0$, on a que $f^{-N}\left(\overline{W}^s_{\mathrm{loc}}(f,p)\right)$ est un fermé d'intérieur vide, puisque f est un difféomorphisme. Le théorème de Baire permet de conclure.

Exercice 3. *Points périodiques hyperboliques*

Par l'exercice **5**. du TD 5 (cf. corrigé), les points $x \in M$ tels que $f^n(x) = x$ sont isolés. Cela conclut par compacité de M.

Exercice 4. *Calculs de variétés stables*

1. On a $f(0) = 0$ et
$$\mathrm{d}f_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
donc $\mathrm{d}f_0$ est un opérateur hyperbolique. Les solutions de $\dot{x} = f(x)$ sont données par
$$x_1(t) = c_1\mathrm{e}^{-t}, \quad x_2(t) = \frac{5\varepsilon c_1^3}{4}\mathrm{e}^{-3t} + c_2\mathrm{e}^{t}, \quad t \in \mathbf{R},$$
où $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. On a $c_1 = x_1(0)$ et $c_2 = x_2(0) - 5\varepsilon x_1(0)^3/4$, et donc
$$W^s(0) = \{(a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2,\ a_2 = 5\varepsilon a_1^3/4\}, \quad W^u(0) = \{(a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2,\ a_1 = 0\}.$$

2. On a $f(0) = 0$ et
$$\mathrm{d}f_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
donc $\mathrm{d}f_0$ est un opérateur hyperbolique. Les solutions de $\dot{x} = f(x)$ sont données par
$$x_1(t) = c_1\mathrm{e}^{-t}, \quad x_2(t) = c_2\mathrm{e}^{-t} - c_1^2\mathrm{e}^{-2t}, \quad x_3(t) = c_3\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{3}c_1^2\mathrm{e}^{-2t},$$
où $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$. On a $c_1 = x_1(0)$, $c_2 = x_2(0) + x_1(0)^2$ et $c_3 = x_3(0) + x_1(0)^2/3$, et donc
$$W^s(0) = \{(a_1,a_2,a_3),\ a_3 + a_1^2/3 = 0\}, \quad W^u(0) = \{(a_1,a_2,a_3),\ a_1 = a_2 = 0\}.$$

Exercice 5. *Variété stable de l'application du chat*

On note $\mathrm{sp}(L) = \{\lambda, \lambda^{-1}\}$ avec $\lambda > 1$. Soient $u, v \in \mathbf{R}^2$ des vecteurs propres associés à λ, λ^{-1}, et $p = [au + bv] \in \mathbf{T}^2$. On a
$$(f_L)^n(p) = [a\lambda^n u + b\lambda^{-n} v], \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$
Soit $\varepsilon > 0$ assez petit et $U = \{[x] \ :\ x \in \mathbf{R}^2,\ \|x\| < \varepsilon\}$. Alors (4) montre que l'ensemble stable local de $[0]$,
$$\left\{p \in U \ :\ \forall n \in \mathbf{N},\ (f_L)^n(p) \in U,\ \lim_n (f_L)^n(p) = [0]\right\}$$
est égal à
$$\{[bv] \ :\ b \in \mathbf{R},\ \|bv\| < \varepsilon\}.$$
Ceci implique que $W^s([0]) = [\mathbf{R}v]$. On peut choisir v de la forme $(1, \alpha)$ avec $\alpha \notin \mathbf{Q}$, et donc $W^s([0])$ est dense dans $\mathbf{T}^2$.

Exercice 6. *Le lemme de Morse*

1. Soit $\Phi : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ définie par

$$\Phi(M) = M^\top S_0 M, \quad M \in S_n(\mathbf{R}).$$

On a

$$(\mathrm{d}\Phi)_I \cdot H = H^\top S_0 + S_0 H, \quad H \in M_n(\mathbf{R}).$$

Soit

$$F = \{H \in M_n(\mathbf{R}) \ : \ S_0 H \in S_n(\mathbf{R})\} = S_0^{-1} S_n(\mathbf{R}).$$

On pose $\tilde{\Phi} = \Phi|_F$. Alors

$$(\mathrm{d}\tilde{\Phi})_I(H) = (S_0 H)^\top + S_0 H = 2 S_0 H$$

pour tout $H \in T_I F = F$, et donc $\mathrm{d}\tilde{\Phi}_0 : F \to S_n(\mathbf{R})$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage V de I dans F tel que $\tilde{\Phi}|_V : V \to S_n(\mathbf{R})$ réalise un difféomorphisme sur son image, notée U. On pose $\varphi = (\tilde{\Phi}|_V)^{-1}$; alors φ réalise les conditions demandées.

2. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit

$$f(x) = x^\top Q(x) x, \quad Q(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f(tx)\mathrm{d}t\right), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

L'application $x \mapsto Q(x)$ est lisse, ce qui conclut.

3. On a $Q(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_f(0)$, et donc $Q(0)$ est non dégénérée. Par la question **1.**, il existe un ouvert $\tilde{V}$ de $S_n(\mathbf{R})$ contenant $Q(0)$ et une application lisse $\varphi : \tilde{V} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$Q(x) = \varphi(Q(x))^\top Q(0) \varphi(Q(x)), \quad x \in Q^{-1}(U).$$

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $r \in \{0, \dots, n\}$ tels que

$$Q(0) = P^\top J P, \quad J = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-r \text{ fois}}).$$

On pose $V = Q^{-1}(\tilde{V})$ et on définit $\psi : V \to \mathbf{R}^n$ par

$$\psi(x) = P\varphi(Q(x))x, \quad x \in Q^{-1}(\tilde{V}).$$

Soit $U = \psi(V)$. Alors $\psi : V \to U$ est un C^∞-difféomorphisme d'inverse

$$\nu : x \mapsto \varphi(Q(x))^{-1} P^{-1} x.$$

On obtient pour tout $x \in V$

$$f(x) = x^\top \varphi(Q(x))^\top P^\top J P \varphi(Q(x)) x = \psi(x)^\top J \psi(x),$$

et finalement, pour tout $y \in U$,

$$f(\nu(y)) = y^\top J y,$$

ce qui conclut.

4. On a

$$\nabla g(y) = 2(y_1, \dots, y_r, -y_{r+1}, \dots, -y_n), \quad y = (y_j) \in \mathbf{R}^n.$$

En particulier la solution du système $\dot{y} = \nabla g(y)$ avec condition initiale $(y_1, \dots, y_n) \in U$ s'écrit, pour $|t|$ petit

$$y(t) = (y_1 \mathrm{e}^{2t}, \dots, y_r \mathrm{e}^{2t}, y_{r+1}\mathrm{e}^{-2t}, \dots, y_n \mathrm{e}^{-2t}),$$

ce qui montre que $W^s_{\mathrm{loc}}(0) = \{y_1 = \dots = y_r = 0\}$ et $W^u_{\mathrm{loc}}(0) = \{y_{r+1} = \dots = y_n = 0\}$.

Exercice 7. *Linéarisation du pendule*

Si $t \mapsto (\theta(t), \omega(t))$ est une trajectoire du système, on a immédiatement

$$\partial_t H(\theta(t), \omega(t)) = 0.$$

En particulier, la trajectoire avec condition initiale (θ, ω) va rester dans l'ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon = H^{-1}(\varepsilon)$ où $\varepsilon = H(\theta, \omega)$. On pose pour $\varepsilon > 0$ petit

$$\psi(\theta, \omega) = \left(\operatorname{sgn}(\theta) \arccos\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right),\ \omega \right), \quad \theta^2 + \omega^2 \leq \varepsilon.$$

Alors $H(\psi(\theta, \omega)) = \theta^2 + \omega^2$; en particulier on a, si $U = \{\theta^2 + \omega^2 \leq \varepsilon\}$,

$$H^{-1}(\varepsilon) \cap U = \psi(C_\varepsilon)$$

où $C_\varepsilon = \{\theta^2 + \omega^2 = \varepsilon\}$. On a $\psi(0) = 0$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left[\operatorname{sgn}(\theta) \arccos\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \right] = \frac{2}{\sqrt{4 - \theta^2}}, \quad |\theta| < 2.$$

En particulier ψ est lisse au voisinage de 0 et on a $\mathrm{d}\psi_0 = \mathrm{id}$.

Il reste à montrer que la trajectoire $\{(\theta(t), \omega(t)) \ : \ t \in \mathbf{R}\}$ partant d'un point (θ_0, ω_0) avec $H(\theta_0, \omega_0) = \delta$ est exactement $H^{-1}(\delta) \cap U$ (ici $\delta < \varepsilon$). Le champ de vecteurs associé au système est donné par

$$X(\theta, \omega) = (\omega, \sin\theta), \quad (\theta, \omega) \in \mathbf{R}^2,$$

et donc le seul point d'annulation de X dans un voisinage de l'origine est 0. De plus X est tangent à la variété $\mathcal{C}_\delta$; en identifiant $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $\mathcal{C}_\delta$ via ψ on obtient donc une application lisse $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, donnée par $\gamma(t) = \psi^{-1}(\theta(t), \omega(t))$, qui vérifie $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t (car X est non nul sur $\mathcal{C}_\delta$). Une telle application est nécessairement surjective par le théorème des valeurs intermédiaires.

Le système du pendule n'est pas localement conjugué à son linéarisé. En effet, toutes les orbites du système linéarisé sont périodiques de période 2π, tandis que la période de la trajectoire partant de $(0, \theta_0)$ (avec $\theta_0 > 0$ petit) est donnée par

$$\tau(\theta_0) = 2\sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}.$$

Cette quantité n'est pas indépendante de θ_0 ; ainsi le flot du pendule ne peut être conjugué à son linéarisé puisque les conjugaisons préservent les périodes.