École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Corrigé 7

Exercice 1. *Normes adaptées*

On supose que pour des contantes $C > 0$ et $\lambda \in (0, 1)$ on a pour tout $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}f_x v\| &\leqslant C\lambda^n \|v\|, \qquad v \in E^s(x), \\ \left\|\mathrm{d}f_x^{-n} v\right\| &\leqslant C\lambda^n \|v\|, \qquad v \in E^u(x). \end{aligned}$$

On pose pour tout $x \in M$ et tout $v \in E^s(x)$

$$\|v\|_{s,x} = \sum_{k=0}^{N} \|\mathrm{d}(f^k)_x v\| \mu^k,$$

où $1 < \mu < \lambda^{-1}$ et $N \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned} \|(\mathrm{d}f)_x v\|_{s,f(x)} &= \mu^{-1} \sum_{k=1}^{N+1} \|(\mathrm{d}f^k)_x v\| \mu^k \\ &= \mu^{-1}\|v\|_{s,x} + \mu^{-1}\left(\mu^N \|(\mathrm{d}f^{N+1})_x v\| - \|v\|\right). \end{aligned}$$

Or $\|(\mathrm{d}f^{N+1})_x v\| \leq C\lambda^{N+1}\|v\|$, donc si N est assez grand de sorte que $\mu^N \lambda^{N+1} C \leqslant 1$, on obtient

$$\|(\mathrm{d}f)_x v\|_{s,f(x)} \leqslant \mu^{-1}\|v\|_{s,x}, \quad x \in M, \quad v \in E^s(x).$$

On définit de même une norme $\|\cdot\|_{u,x}$ sur $E^u(x)$ et on pose

$$\|v\|_x' = \|\pi_s(x)v\|_{s,x} + \|\pi_u(x)v\|_{u,x}, \quad x \in M, \quad v \in T_xM,$$

où $\pi_{s/u}(x)$ est la projection $T_xM \to E^{s/u}(x)$. Puisque $\pi_s(x)$ et $\pi_u(x)$ dépendent continument de x (car c'est le cas pour $E^s(x)$ et $E^u(x)$), la norme $\|\cdot\|'$ est continue. On approxime la norme $\|\cdot\|'$ par une norme lisse $\|\cdot\|''$ telle que

$$(1-\varepsilon)\|\cdot\|'' \leq \|\cdot\|' \leq (1+\varepsilon)\|\cdot\|''.$$

On a alors, si $x \in M$ et $v \in E^s(x)$, et $\varepsilon > 0$ est assez petit,

$$\|(\mathrm{d}f)_x v\|'' \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\|(\mathrm{d}f)_x v\|' \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\mu^{-1}\|v\|' \leqslant \underbrace{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mu^{-1}}_{\tilde{\lambda} < 1}\|v\|'',$$

ce qui conclut.

Exercice 2. *Points périodiques des difféomorphismes d'Anosov*

Soit M une variété compacte connexe et $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov.

1. Soit x tel que $f^n(x) = x$; on pose $g = f^n$. Alors $A = (\mathrm{d}g)_x : T_xM \to T_xM$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in \mathrm{sp}((\mathrm{d}g)_x)$ avec $|\lambda| = 1$.

   Alors on sait qu'il existe $v \in T_xM$ et $C > 0$ tel que $C^{-1} \leqslant \|A^k v\| \leqslant C$ pour tout k, où $\|\cdot\|$ est la norme donnée dans la définition du difféomorphisme d'Anosov.

   Alors on a (pour différentes constantes) aussi $C^{-1} \leqslant \|\pi_s(x)A^k v\| + \|\pi_u(x)A^k v\| \leqslant C$ pour tout k.

   Or A préserve $E^s(x)$ et $E^u(x)$ donc $\pi_s(x)$ et $\pi_u(x)$ commutent avec A de sorte que si $v_s = \pi_s(x)v \in E^s(x)$ et $v_u = \pi_u(x)v \in E^u(x)$ on a $\pi_{s/u}(x)A^k v = A^k v_{s/u}$.

   Puisque $v \neq 0$, on a (puisque A est hyperbolique)

   $$\limsup_{|k|\to+\infty} \left(\|A^k v_s\| + \|A^k v_u\|\right) = +\infty,$$

   ce qui est absurde.

2. (a) Il suffit de remplacer x_k et y_k par $f^{n(k)}(x_k)$ et $f^{n(k)}(y_k)$ où

   $$\mathrm{d}\left(f^{n(k)}(x_k), f^{n(k)}(y_k)\right) \geqslant \frac{1}{2}\sup_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{d}\left(f^n(x_k), f^n(y_k)\right).$$

   (b) C'est immédiat par compacité de M.

   (c) C'est immédiat par compacité de M.

   (d) Soient U_+ et U_- des cartes autour de z_+ et z_-. On suppose que j est assez grand de sorte que $f^{\pm n_j^\pm}(z)$ soit contenu dans $U_\pm$.

   Alors pour tout k assez grand, $f^{\pm n_j^\pm}(x_k)$ et $f^{\pm n_j^\pm}(y_k)$ sont contenus dans $U_\pm$, et (ici $n_j = n_j^+$ ou n_j^-)

   $$f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k) = \left(\mathrm{d}f^{\pm n_j^\pm}\right)_{x_k}(y_k - x_k) + o_j(\|x_k - y_k\|).$$

   Ainsi,

   $$\frac{f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k)}{\|x_k - y_k\|} = \left(\mathrm{d}f^{\pm n_j^\pm}\right)_{x_k}\left(\frac{y_k - x_k}{\|y_k - x_k\|}\right) + o_j(1). \quad (*)$$

   On a $C > 0$ telle que pour tout k

   $$\left\|\frac{f^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f^{\pm n_j^\pm}(x_k)}{\|x_k - y_k\|}\right\| \leq \frac{C\mathrm{d}\left(f^{\pm n_j^\pm}(x_k), f^{\pm n_j^\pm}(y_k)\right)}{C^{-1}\mathrm{d}(x_k, y_k)} \leq 2C,$$

   par (a), puisque pour tous x', y' dans un support de carte, on a $C^{-1}\mathrm{d}(x', y') \leqslant \|x' - y'\| \leqslant C\mathrm{d}(x', y')$ pour un certain C (exercice).

   On obtient finalement, en faisant tendre k vers $+\infty$ dans $(*)$,

   $$\left\|\left(\mathrm{d}f^{\pm n_j^\pm}\right)_z v\right\| \leqslant 2C, \quad j \gg 1.$$

   Ceci est impossible car pour tout $(x, v) \in TM$ avec $v \neq 0$ on a

   $$\liminf_{|n|\to+\infty} \|(\mathrm{d}f^n)_x v\| = +\infty,$$

   puisque f est d'Anosov.

3. C'est une application directe de l'**Exercice 2** du TD 3, qui donne

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log(1 + p_n(f)) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f).$$

Ceci implique que si $\varepsilon > 0$, on a que pour tout $n > n_0$ assez grand

$$p_n(f) \leqslant \exp((n+\varepsilon) h_{\mathrm{top}}(f)).$$

Si $C = \sup_{n \leqslant n_0} p_n(f) \exp\left(-(n+\varepsilon)h_{\mathrm{top}}(f)\right)$, on obtient

$$p_n(f) \leqslant C \exp((n+\varepsilon) h_{\mathrm{top}}(f)), \quad n \geqslant 1.$$

Exercice 3. *Hyperbolicité et transversalité*

On écrit

$$T_{(p,p)}\mathrm{Gr}(f) = \{((\mathrm{d}f)_p v,\ v)\,,\ v \in T_p M\} \subset T_{(p,p)}(M \times M),$$

et

$$T_{(p,p)}\Delta(M) = \{(v,v), v \in T_p M\}.$$

Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $T_{(p,p)}(M \times M)$ de dimension $\dim(M)$. En particulier on a

$$\begin{aligned}\Delta(M) \pitchfork_{(p,p)} \mathrm{Gr}(f) &\iff T_{(p,p)}\mathrm{Gr}(f) \cap T_{(p,p)}\Delta(M) = \{0\}\\ &\iff \forall v \in T_p M, \quad (\mathrm{d}f_p - \mathrm{id})\, v = 0 \implies v = 0\\ &\iff 1 \notin \mathrm{sp}(\mathrm{d}f_p).\end{aligned}$$

Exercice 4. *Pistage*

Soit $f : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ un difféomorphisme d'Anosov.

1. Soit $p = (x,y) \in \mathbf{R}^2$. On écrit

$$F(p + (k,\ell)) = F(p) + (r_p(k,\ell), s_p(k,\ell)), \quad (k,\ell) \in \mathbf{Z}^2,$$

où $r_p, s_p : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$.
La fonction $p \mapsto F(p+(k,\ell)) - F(p)$ est continue, et à valeurs dans $\mathbf{Z}^2$, donc $r_p(k,\ell)$ et $s_p(k,\ell)$ ne dépendent pas de p ; on les note $r(k,\ell)$ et $s(k,\ell)$.
On montre que r et s sont additifs. D'un côté on a

$$F(p + (k,\ell) + (k',\ell')) = F(p) + (r(k) + r(k'), s(\ell) + s(\ell')),$$

et de l'autre

$$F(p + (k,\ell) + (k',\ell')) = F(p + (k+k', \ell+\ell')) = F(p) + (r(k+k'), s(\ell+\ell')),$$

de sorte que

$$r(k+k') = r(k) + r(k'), \quad s(\ell+\ell') = s(\ell) + s(\ell'), \quad k,k',\ell,\ell' \in \mathbf{Z}.$$

On note alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $(a,c) = (r,s)(1,0)$ et $(b,d) = (r,s)(0,1)$. Alors A convient.

On note $f_\star = f_A : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$.

2. Montrons d'abord que F est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$. Soit $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ qui relève f^{-1}. Alors on vérifie que $(x,y) \mapsto (G \circ F)(x,y) - (x,y)$ est à valeurs dans $\mathbf{Z}^2$, donc constante, disons égale à (k,ℓ).

   Si $\tilde{G} = G - (k,\ell)$ on a donc $\tilde{G} \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ et donc F est un difféomorphisme d'inverse $\tilde{G}$.

   Notons $F^{-1}(p + (k,\ell)) = F^{-1}(p) + B(k,\ell)$ où $B \in M_2(\mathbf{Z})$. Alors

   $$p + (k,\ell) = p + AB(k,\ell), \quad (k,\ell) \in \mathbf{Z}^2.$$

   Ceci montre que A est inversible d'inverse B (par densité de $\mathbf{Q}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ par exemple). Ainsi $|\det(A)| = 1$.

3. L'homotopie $F_t = tF + (1-t)A$ passe au quotient.

4. On pose $p_n = a_n v + b_n w$ où $Av = \lambda v$ et $Aw = \lambda^{-1}$ où $|\lambda| > 1$.

   Alors $|\lambda a_n - a_{n+1}| \leqslant r$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et donc

   $$\begin{aligned} \left|a_n - \lambda^{-k} a_{n+k}\right| &\leqslant \left|a_n - \lambda^{-1} a_{n+1} + \cdots + \lambda^{-(k-1)} a_{n+k-1} - \lambda^{-k} a_{n+k}\right| \\ &\leqslant r\left(1 + |\lambda|^{-1} + \cdots + |\lambda|^{-(k-1)}\right) \\ &\leqslant \frac{r|\lambda|}{|\lambda| - 1}. \end{aligned}$$

   On obtient pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$,

   $$\left|\lambda^{-n} a_n - \lambda^{-(n+k)} a_{n+k}\right| \leqslant \frac{|\lambda|^{-n+1} r}{|\lambda| - 1}, \quad (*)$$

   et donc $\lambda^{-n} a_n \to a$ quand $n \to +\infty$ pour un $a \in \mathbf{R}$.

   De même on a $\lambda^n b_n \to b$ quand $n \to -\infty$ pour un $b \in \mathbf{R}$.

   On pose $q = av + bw$. Alors $A^n q = \lambda^n av + \lambda^{-n} bw$.

   Par $(*)$ (en faisant $k \to +\infty$) on a

   $$|\lambda^n a - a_n| \leqslant \frac{|\lambda| r}{|\lambda| - 1}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

   et la même inégalité est vraie pour $|\lambda^{-n} b - b_n|$.

   On conclut que $\|A^n q - p_n\| \leq C\dfrac{|\lambda| r}{|\lambda| - 1} = \delta(r)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

   L'unicité est claire puisque $\|A^n(q - q')\| \leq 2\delta$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ implique $y = y'$.

5. Soit $p \in \mathbf{R}^2$. On note $G_p : x \mapsto g(-x) - p$.

   Alors $\|G_p(x)\| \leqslant \|g\|_\infty + \|p\|$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$. En particulier on a

   $$G\left(\overline{B}(0, \delta + \|p\|)\right) \subset \overline{B}(0, \delta + \|p\|).$$

   Le théorème de Brouwer donne alors z tel que $G_p(z) = z$, ce qui équivaut à $g(-z) - z = p$, i.e. $(\mathrm{Id} + g)(-z) = p$.

6. Soit $p \in \mathbf{R}^2$. On note $p_n = F^n(p)$. Alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a
$$\|Ap_n - p_{n+1}\| = \|AF^n(p) - F^{n+1}(p)\| \leqslant \|F - A\|_\infty.$$
Puisque $F(p' + (k, \ell)) = F(p') + A(k, \ell)$ pour tout p' et tous k, ℓ on a $r = \|F - A\|_\infty < \infty$.
Par la question **4.** il existe un unique $H(p) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|A^n H(p) - F^n(p)\| \leqslant \delta(r)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
Ceci s'écrit aussi $\|A^{n-1}(AH(p)) - F^{n-1}(F(p))\| \leqslant \delta(r)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et donc $AH(p) = H(F(p))$ par unicité.
On vérifie aisément que $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ passe au quotient en une application $h : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$, qui vérifie la propriété de semi-conjugaison demandée.
Montrons que H est continue. Soit (p_k) une suite qui tend vers p. Alors la suite $(H(p_k))$ est bornée car $\|H(p) - p\| \leqslant \delta(r)$. Soit q une valeur d'adhérence de cette suite.
Soit $n \in \mathbf{Z}$; on a $\|A^n H(p_k) - F^n(p_k)\| \leq \delta(r)$ et donc en faisant $k \to +\infty$ on obtient $\|A^n q - F^n(p)\| \leq \delta(r)$.
Ceci implique que $q = H(p)$ par unicité du pistage. Ainsi $H(p)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(H(p_k))$ et donc $H(p_k) \to H(p)$.
H est donc continue et $H - \mathrm{Id}$ est bornée, on peut donc appliquer la question **5.** pour obtenir que $H = \mathrm{Id} + (H - \mathrm{Id})$ est surjective.

7. Soit $A \in M_2(\mathbf{Z})$ de déterminant ± 1. On note $f_A : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ l'automorphisme associé. Soit $\varepsilon > 0$ et $f : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ tel que $\|f - f_A\|_\infty < \varepsilon$. Alors il existe un relevé F de f tel que $\|A - F\|_\infty < \varepsilon$.
Par ce qui précède, il existe une semiconjugaison $h : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ telle que $h \circ f = f_A \circ h$, qui vérifie de plus que $\|h - \mathrm{Id}\|_\infty < \delta(\varepsilon)$.
Montrons que h est injective : si $p, p' \in \mathbf{T}^2$ vérifient $h(p) = h(p')$ alors $h(f^n(p)) = h(f^n(p'))$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. En particulier
$$\mathrm{d}(f^n(p), f^n(p')) < 2\delta(\varepsilon), \quad n \in \mathbf{Z}.$$
Lemme 1. *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov. Alors il existe $\delta > 0$ tel que tout difféomorphisme assez proche de f en norme C^1 est expansif de constante d'expansivité δ.*

En admettant le lemme, on obtient que $p = p'$ si $\delta(\varepsilon) < \delta$, ce qui sera vérifié si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Ainsi h est injective, et donc continue bijective. Par compacité de $\mathbf{T}^2$, c'est un homéomorphisme.

Preuve du lemme. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite de fonctions (f_k) qui tend vers f dans $C^1(M, M)$, et des points $x_k \neq y_k$ tels que $\mathrm{d}(f_k^n(x_k), f_k^n(y_k)) < 1/k$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout k.
On peut alors adapter la démonstration faite à la question **2.** de l'**Exercice 2** pour obtenir une contradiction, en écrivant notamment
$$\begin{aligned} f_k^{\pm n_j^\pm}(y_k) - f_k^{\pm n_j^\pm}(x_k) = &\int_0^1 \left(\mathrm{d}f^{\pm n_j^\pm}\right)_{(1-t)x_k + t y_k} (y_k - x_k)\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^1 \left(\mathrm{d}f_k^{\pm n_j^\pm} - \mathrm{d}f^{\pm n_j^\pm}\right)_{(1-t)x_k + t y_k} (y_k - x_k)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
□

Exercice 5. *Gradients de fonctions de Morse*

1. On considère une fonction f définie au voisinage de $0 \in \mathbf{R}^n$ telle que $\mathrm{d}f_0 = 0$, et $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ un difféomorphisme local au voisinage de 0, tel que $\varphi(0) = 0$.

   On calcule

$$\begin{aligned}\partial_k \partial_\ell (f \circ \varphi) &= \sum_i \partial_k \left([(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_\ell \varphi^i \right) \\ &= \sum_i [(\partial_i f) \circ \varphi] \partial_k \partial_\ell \varphi^i + \sum_{j,i} [(\partial_i \partial_j f) \circ \varphi](\partial_k \varphi^i)(\partial_\ell \varphi^j).\end{aligned}$$

   Puisque $\mathrm{d}f_0 = 0$ on obtient

$$\mathrm{Hess}_{f\circ\varphi}(0) = (\mathrm{d}\varphi_0)^\top \mathrm{Hess}_f(0)(\mathrm{d}\varphi_0),$$

   ce qui conclut.

2. On remarque qu'une fonction de Morse a un nombre fini de points critiques, car ils sont isolés.

   De plus la condition "$\mathrm{Hess}_f(0)$ est non dégénérée" est ouverte, ce qui conclut.

3. On suppose $\varphi_\tau(x) = x$ avec $\tau > 0$. Calculons

$$\begin{aligned}\partial_t f(\varphi_t(x)) &= \mathrm{d}f_{\varphi_t(x)}(X(\varphi_t(x))) \\ &= -\mathrm{d}f_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x))) \\ &= -g_{\varphi_t(x)}(\nabla^g f(\varphi_t(x)), \nabla^g f(\varphi_t(x))) \leqslant 0.\end{aligned}$$

   Puisque $f(\varphi_\tau(x)) = x$ avec $\tau > 0$ on obtient que pour tout $t \in [0, \tau]$, $\nabla^g f(\varphi_t(x)) = 0$.

4. C'est la même démonstration : f décroît strictement le long des lignes de flots de X qui ne sont pas réduites à un point. Ainsi si $\nabla_g f(x) \neq 0$, on a que $f(\varphi_t(x)) < f(x) - \varepsilon$ pour tout $t > \delta$ (pour certains $\delta, \varepsilon > 0$) et donc $\varphi_t(x)$ ne peut pas repasser près de x pour $t > \delta$.

5. Soit $x \in M$, et p une valeur d'adhérence de $(\varphi_t(x))_{t \geqslant 0}$. Alors de même que précédemment, on a $\nabla^g f(p) = 0$.

   Comme $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ décroît, on a $f(\varphi_t(x)) \geqslant f(p)$ pour tout t.

   Par hypothèse, des coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$ autour de p telles que

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(p) + \sum_{i=1}^r (x^i)^2 - \sum_{i=r+1}^n (x^i)^2,$$

   et

$$-\nabla^g f = 2(-x^1, \dots, -x^r, x^{r+1}, \dots, x^n).$$

   Ainsi, le fait que $f(\varphi_t(x)) \geqslant p$ pour tout t implique que si $\varphi_t(x)$ est assez proche de p, on a nécessairement $\varphi_t(x) \in \{x^{r+1} = \dots = x^n = 0\}$, car sinon on aurait $f(\varphi_{t'}(x)) < f(p)$ pour un $t' > t$.

   Ceci montre que $\varphi_t(x) \to p$ quand $t \to +\infty$. De même on montre que $\varphi_{-t}(x) \to q$ quand $t \to +\infty$ avec $q \in \mathrm{Crit}(f)$.