École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 7

Soit M une variété compacte et $f : M \to M$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de M. On rappelle qu'un fermé $\Lambda \subset M$ invariant par f est dit hyperbolique si tout $x \in \Lambda$, il existe une décomposition $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$ dépendant continument du paramètre $x \in \Lambda$ et vérifiant les points suivants.

1. La décomposition est stable par f,
$$\mathrm{d}f_x(E^\bullet(x)) = E^\bullet(f(x)), \quad x \in M, \quad \bullet = s, u.$$
2. Il existe une norme lisse $\|\cdot\|$ sur TM et $\lambda \in (0,1)$ telle que pour tout $x \in M$
$$\|\mathrm{d}f_x v\| \leq \lambda \|v\|, \quad v \in E^s(x),$$
$$\left\|\mathrm{d}f_x^{-1} v\right\| \leq \lambda \|v\|, \quad v \in E^u(x).$$

Si $\Lambda = M$, on dit que f est un difféomorphisme d'Anosov.

Exercice 1. *Normes adaptées*

Montrer que dans le cas d'un difféomorphisme d'Anosov, on peut remplacer la condition 2 de la définition ci-dessus par la condition suivante. Il existe une norme lisse $\|\cdot\|$ sur TM et des constantes $C > 0$, $\lambda \in (0,1)$ telle que pour tout $x \in M$ et tout $n \in \mathbf{N}$
$$\|\mathrm{d}(f^n)_x v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad v \in E^s(x),$$
$$\left\|\mathrm{d}(f^{-n})_x v\right\| \leq C\lambda^n \|v\|, \quad v \in E^u(x).$$
Indication : on pourra commencer par construire une norme adaptée continue, puis l'approcher par des normes lisses.

Exercice 2. *Points périodiques des difféomorphismes d'Anosov*

Soit M une variété compacte connexe et $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov.

1. Montrer que tout point périodique de f est hyperbolique.
2. On veut montrer que f est une application expansive de (M, d), où d est la distance induite par n'importe quelle norme sur TM. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe deux suites de (x_k) et (y_k) de M telles que pour tout k on a $x_k \neq y_k$ et $\mathrm{d}(f^n(x_k), f^n(y_k)) < \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
   (a) Montrer qu'on peut supposer que $\dfrac{\mathrm{d}(f^n(x_k), f^n(y_k))}{\mathrm{d}(x_k, y_k)} \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.
   (b) Montrer que quitte à extraire on peut supposer que x_k et y_k sont contenus dans une carte autour d'un point $z \in M$ avec $x_k, y_k \to z \in M$ quand $k \to +\infty$, et que (dans ladite carte)
   $$\frac{y_k - x_k}{\|y_k - x_k\|} \to v \in S^{\dim(M)-1}.$$
   (c) Montrer qu'on peut trouver $z^+, z^- \in M$ et des extractions $(n_j^+), (n_j^-)$ telles que $f^{\pm n_j^\pm}(z) \to z^\pm$ quand $j \to +\infty$.
   (d) En déduire que v vérifie $\left\|\mathrm{d}\left(f^{n_j^\pm}\right)_z(v)\right\| \leqslant C$ pour tout j assez grand et en déduire une contradiction.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que
$$p_n(f) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{card}\{p \in M,\ f^n(p) = p\} \leq C \mathrm{e}^{n(h_{\mathrm{top}}(f)+\varepsilon)}, \quad n \geq 1.$$

Exercice 3. *Hyperbolicité et transversalité*

Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme. On définit

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(f(x), x),\ x \in M\}, \quad \Delta(M) = \{(x, x),\ x \in M\}.$$

Montrer que $\mathrm{Gr}(f)$ et $\Delta(M)$ sont des sous-variétés de $M \times M$. Montrer qu'un point fixe p de f est non dégénéré (i.e. $1 \notin \mathrm{sp}(\mathrm{d}f_p)$) si, et seulement si, $\mathrm{Gr}(f)$ et $\Delta(M)$ s'intersectent transversalement en (p, p).

Exercice 4. *Pistage*

Soit $f : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ un difféomorphisme d'Anosov.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbf{Z})$ telle que si $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ relève f, alors
$$F(x + k, y + \ell) = F(x, y) + A(k, \ell), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (k, \ell) \in \mathbf{Z}^2.$$

On note $f_\star = f_A : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$.

2. Montrer que $|\det A| = 1$.
3. Montrer que les applications f et $f_\star$ sont homotopes en tant qu'applications $\mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$.

On suppose dans la suite que $|\mathrm{tr}(A)| > 2$.

4. Soit $r > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{R}^2$ vérifiant
$$\|p_{n+1} - Ap_n\| \leq r, \quad n \in \mathbf{Z},$$
il existe un unique $q \in \mathbf{R}^2$ tel que
$$\|A^n q - p_n\| \leq \delta, \quad n \in \mathbf{Z}.$$
Indication : on pourra écrire $p_n = a_n v + b_n w$ où $Av = \lambda v$ et $Aw = \lambda^{-1} w$ avec $|\lambda| > 1$ et montrer que les suites $(\lambda^{-n} a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\lambda^n b_{-n})_{n\geqslant 0}$ sont de Cauchy.
5. Montrer que pour toute application continue bornée $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, l'application $\mathrm{Id} + g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est surjective.
Indication : on pourra appliquer le théorème de Brouwer (toute application continue d'une boule fermée dans elle-même admet un point fixe).
6. En déduire qu'il existe une application continue surjective $h : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ telle que $f_\star \circ h = h \circ f$.
7. Montrer que tout automorphisme hyperbolique de $\mathbf{T}^2$ est structurellement stable.

Exercice 5. *Gradients de fonctions de Morse*

Soit M une variété compacte et $f : M \to \mathbf{R}$ une fonction lisse. On dit que f est une fonction de Morse si pour tout point $p \in M$ tel que $\mathrm{d}f_p = 0$, la matrice Hessienne de f en p (dans une carte locale) est non dégénérée.

1. Montrer que la condition précédente ne dépend pas de la carte choisie.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de Morse est ouvert dans $\mathcal{C}^2(M, \mathbf{R})$.

Soit $f : M \to M$ une fonction de Morse. On se donne une métrique Riemannienne g sur M et on définit $\nabla^g f \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$ le g-gradient de f par

$$\mathrm{d}f_p(v) = g_p(\nabla^g f, v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

On suppose que pour tout point critique $p \in \mathrm{Crit}(f)$, il existe des coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ centrées en p telles que

$$g = \sum_{i=1}^n (\mathrm{d}x^i)^2,$$

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(p) \sum_{i=1}^r (x^i)^2 - \sum_{i=r+1}^n (x^i)^2.$$

On note $\varphi_t : M \to M$ le flot de $X = -\nabla^g f$.

3. On suppose $\varphi_t(x) = x$. Montrer que $t = 0$ ou $\nabla^g f(x) = 0$.
4. Soit $x \in M$ un point non-errant. Montrer que $\nabla^g f(x) = 0$.
5. Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe $p, q \in \mathrm{Crit}(f)$ tels que si $t \to +\infty$
$$\varphi_t(x) \to p, \quad \varphi_{-t}(x) \to q.$$