École Normale Supérieure chaubet@dma.ens.fr
2021/2022

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 8

Exercice 2 *Théorèmes d'extension : rappels*

1. Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole, c'est-à-dire que $\emptyset \neq \mathcal{A}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a
$$A \setminus B \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad A \cup B \in \mathcal{A}.$$
Soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ une mesure sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que $\mu(\emptyset) = 0$ et pour toute séquence $(E_i) \in \mathcal{A}^{\mathbf{N}}$ telle $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ on a
$$\bigcup_{i\in\mathbf{N}} E_i \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(E_j) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} E_i\right).$$
Théorème (Carathéodory)**.** *Il existe une mesure* $\mu^* : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ *qui étend* μ*. Si* μ *est* σ*-finie, alors* μ^* *est unique.*

2. Le théorème est le suivant.

Théorème (Classe monotone)**.** *On suppose que* Π *est un* π*-système (i.e. un sous-ensemble de parties de* E *stable par intersections finies). Alors*
$$\bigcap_{\mathcal{C}} \mathcal{C} = \sigma(\Pi),$$
où l'intersection porte sur l'ensemble des classes monotones $\mathcal{C}$ *telles que* $\Pi \subset \mathcal{C}$.

Exercice 3. *Tribu produit*

1. $\mathcal{F}^{\otimes \mathbf{N}}$ est par définition la tribu engendrée par les cylindres.

2. Si $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ avec $A_i \in \mathcal{S}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, on pose
$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$
Si A s'écrit aussi $A_1' \cup \cdots \cup A_m'$, alors
$$\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i') = \sum_{i,j} \mu(A_i' \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j),$$
donc $\mu(A)$ ne dépend pas de la décomposition choisie.

On vérifie alors facilement que μ définit bien une mesure sur $\mathcal{S}$.

3. On se donne P une mesure de probabilité sur A et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des cylindres. On définit $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ par $\mu(\emptyset) = 0$ et

$$\mu\left(C_{n,\mathbf{A}}\right) = \prod_{j=1}^{p} P(A_j), \quad \mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_p) \in \mathcal{F}^p. \tag{1}$$

On se donne des cylindres $S^n = S_0^n \times S_1^n \times \cdots \in \mathcal{S}$, $(n \in \mathbf{N})$ tels que $X = \bigcup_n S^n$; pour tout $k \in \mathbf{N}$ on consid ère $H_k : A^{k+1} \to [0, 1]$ définie par

$$H_k(x_0, \ldots, x_k) = \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j>k} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^{k} 1_{S_i^n}(x_i) \right).$$

(a) On a

$$\begin{aligned}
&\int_A H_{k+1}(x_0, \ldots, x_k, x) \mathrm{d}P(x) \\
&\qquad = \int_A \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j>k+1} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^{k} 1_{S_i^n}(x_i) \right) 1_{S_{k+1}^n}(x) \mathrm{d}P(x) \\
&\qquad = \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j>k+1} P(S_j^n) \right) \left(\prod_{i=0}^{k} 1_{S_i^n}(x_i) \right) P(S_{k+1}^n) \\
&\qquad = H_k(x_0, \ldots, x_k).
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\int_A H_0(x) \mathrm{d}P(x) = \int_A \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{j>0} P(S_j^n) \right) 1_{S_0^n}(x) \mathrm{d}P(x) = \sum_n \mu(S^n) < 1.$$

Ainsi il existe $x_0 \in A$ tel que $H_0(x_0) < 1$. On suppose construits $x_0, \ldots, x_k \in A$ tels que $H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1$. Alors par (a) on a

$$\int_A H_{k+1}(x_0, \ldots, x_k, x) \mathrm{d}P(x) = H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1.$$

Ainsi il existe $x_{k+1} \in A$ tel que $H_{k+1}(x_0, \ldots, x_{k+1}) < 1$.

(c) Par la question **2.**, l'application μ s'étend uniquement en une mesure additive sur l'ensemble des unions de cylindres. On veut appliquer le théorème de Carathédory. Pour cela, on aimerait montrer que μ est σ-additive (il suffit de le montrer sur les cylindres). Soit (S^n) une suite de cylindres deux-à-deux disjoints telle que $X = \cup_n S^n$. On suppose par l'absurde que $\sum_n \mu(S^n) < 1$. Par (b), il existe une suite $\mathbf{x} = (x_n)$ telle que $H_k(x_0, \ldots, x_k) < 1$ pour tout k. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $x \in S^m$, et $i_m \in \mathbf{N}$ tel que $S_i^m = A$ pour tout $j > i_m$. Alors on a

$$\left(\prod_{j>i_m} P(S_i^m) \right) \left(\prod_{i=0}^{i_m} 1_{S_i^m}(x_i) \right) = 1,$$

et donc

$$H_{i_m}(x_0, \ldots x_{i_m}) \geqslant \left(\prod_{j>i_m} P(S_i^m) \right) \left(\prod_{i=0}^{i_m} 1_{S_i^m}(x_i) \right) = 1,$$

ce qui est absurde.

Montrons maintenant que μ est invariante par le décalage $\sigma : X \to X$. défini par

$$\sigma : (x_n) \mapsto (x_{n+1}).$$

Soit $S = S_0 \times S_1 \times \cdots$ un cylindre. Alors

$$\sigma^{-1}(S) = A \times S_0 \times S_1 \times \cdots ,$$

et donc $\mu(\sigma^{-1}(S)) = \mu(S)$. Cette égalité est donc aussi vraie pour tout $S \in \mathcal{F}^{\otimes \mathbf{N}}$.

4. La seule difficulté est la σ-additivité. On se donne une suite de cylindres (S^n) comme précédemment.

   On pose

$$F_N = \complement \left(\bigcup_{n \leqslant N} \sqrt{}\text{ä}S^n \right).$$

   Alors F_N est une suite décroissante de compacts, telle que l'intersection $\bigcap_N F_N$ est vide.

   Ceci implique que $F_N = \emptyset$ si N est assez grand, et donc $\cup_{n \geqslant N} S^n = A^{\mathbf{N}}$. En particulier $\mu(\cup_{n \leqslant N} S^n) = 1$.

5. P_M est additive car si $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_p) \in A^{p+1}$ on a d'un côté

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_{n,i\mathbf{w}}\right) = \mu(C_{n+1,\mathbf{w}}) = v_{w_0} \prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j, w_{j+1}},$$

   et de l'autre, puisque $v = Mv$,

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(C_{n,i\mathbf{w}}) = \sum_{i=1}^{m} v_i m_{i,w_0} \prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j,w_{j+1}} = \left(\prod_{j=0}^{p-1} m_{w_j,w_{j+1}}\right) \underbrace{\sum_{i=1}^{m} v_i m_{i,w_0}}_{v_{w_0}}.$$

   L'existence et l'unicité de P_M sont alors claires par le même raisonnement qu'aux questions précédentes. Il suffit donc de montrer que P_M est une mesure de probabilités invariante par le décalage.

   C'est une mesure de probabilités :

$$P_M(X) = \sum_{w \in A} \mu(C_{0,w}) = \sum_{i=1}^{m} v_i = 1.$$

   De plus P_M est σ-invariante car $\sigma^{-1}(C_{n,\mathbf{w}}) = C_{n+1,\mathbf{w}}$.

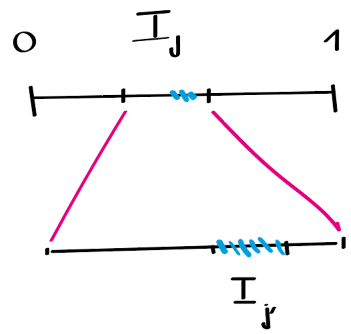
6. On se donne un mot $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_p)$. Alors

$$P^{\otimes \mathbf{N}}(C_{n,\mathbf{w}}) = \prod_{j=0}^{p} P(\{w_j\}) = P(\{w_0\}) \prod_{j=0}^{p-1} M(P)_{w_j,w_{j+1}},$$

   ce qui conclut car si $v = (P(\{1\}), \cdots, P(\{m\}))$ on a $vM(P) = v$.

7. Soit $\mathbf{w} = (w_0, \ldots, w_p) \in A^{p+1}$. Alors $x \in H(C_{n,\mathbf{w}})$ si et seulement si

$$\forall j = 0, \ldots, p, \quad m^{n+j} x \in \left[\frac{w_j - 1}{m}, \frac{w_j}{m}\right[\quad \text{mod } \mathbf{Z}.$$



Par suite on a, puisque $x \mapsto m^n x$ préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$,

$$\mathrm{Leb}(H(C_{n,\mathbf{w}})) = \mathrm{Leb}\left(\bigcap_{j=0}^{p} \left\{x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z},\ m^j x \in I_j\right\}\right) = \frac{1}{m^{p+1}}$$

Or

$$\mu_m^{\otimes \mathbf{N}}(C_{n,\mathbf{w}}) = \prod_{j=0}^{p} P(\{w_j\}) = \frac{1}{m^{p+1}}.$$

8. L'ensemble $\complement Z$ des points m-adiques est dénombrable, notons le $\{y_k,\ \sqrt{}\text{ä}k \in \mathbf{N}\}$. On a alors

$$\mathrm{Leb}\left(\complement Z\right) = \sum_k \mu(\{y_k\}) = 0.$$

9. Si $\mathbf{x} \in H^{-1}(Z)$, alors $\mathbf{x}$ ne stationne pas à 1 ni m à partir d'un certain rang.

   On a

$$\begin{aligned} H(\sigma(\mathbf{x})) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1} - 1}{m^k} \sqrt{}\text{ä} \mod \mathbf{Z} \\ &= mH(\mathbf{x}) \mod \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

   Il est clair que $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui n'est pas m-adique admet exactement un antécédent par H, en regardant les nombres $x_k \in \{1, \ldots, m\}$ ($k \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}$) tels que

$$x_k - 1 = \lfloor m^k x \rfloor \mod m,$$

   qui ne stationnent jamais à 1 ou m.