École Normale Supérieure
2020/2021

chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Corrigé 9

Exercice 1. *Exemples de mesures invariantes*

1. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue. On a
$$\int_0^1 (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu = \int_0^{1/2} (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu + \int_{1/2}^1 (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu.$$
Or en effectuant le changement de variable $x = 1-y$ on a
$$\int_{1/2}^1 \varphi\left(2\sqrt{y(1-y)}\right)\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{1-y}} = \int_0^{1/2} \varphi\left(2\sqrt{x(1-x)}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}.$$
On obtient
$$\int_0^1 (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu = \int_0^{1/2} \varphi\left(2\sqrt{x(1-x)}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$
On pose maintenant $u = 2\sqrt{x(1-x)}$, ce qui donne, en utilisant $\sqrt{1-2\sqrt{x(1-x)}} = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$,
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{1-u}} &= \frac{(1-2x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \times \frac{1}{2\sqrt{1-2\sqrt{x(1-x)}}}\\ &= \frac{(1-2x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \times \frac{1}{2\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{(1-2x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \times \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{2(1-2x)}\\ &= \frac{\mathrm{d}x}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).\end{aligned}$$
Ainsi on obtient
$$\int_0^1 (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu = \int_0^1 \varphi(u)\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{1-u}} = \int_0^1 \varphi\mathrm{d}\mu$$

2. Pour tout $\varphi \in C^0(M)$ on a, puisque $f^n(x) = x$
$$\begin{aligned}\mu(\varphi \circ f) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (\varphi \circ f)(f^k(x))\\ &= \frac{1}{n}\varphi(f^k(x))\\ &= \mu(\varphi).\end{aligned}$$

3. Soit $\varphi \in C^0([0,1])$. On a, si λ est la mesure de Lebesgue,
$$\begin{aligned}\int_0^1 (\varphi \circ f)\mathrm{d}\lambda &= \int_0^{1/2} \varphi(2x)\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \varphi(2-2x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{1/2} \varphi(2x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

4. Soit $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^d)$ et $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi$ où $\pi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{T}^d$ est la projection naturelle.
Soit $A \in M_d(\mathbf{Z})$ avec $\det(A) = \pm 1$, et $f_A : \mathbf{T}^d \to \mathbf{T}^d$ l'automorphisme associé. Alors
$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{T}^d} (\varphi \circ f_A)\mathrm{d}\mu &= \int_{[0,1]^d} \tilde{\varphi}(Ax)\mathrm{d}x \\ &= \int_{A([0,1]^d)} \tilde{\varphi}(x)\mathrm{d}x \qquad \text{car } |\det(A)| = 1 \\ &= \int_{[0,1]^d} \tilde{\varphi}(x)\mathrm{d}x \qquad \text{par 1-périodicité de } \tilde{\varphi} \\ &= \int_{\mathbf{T}^d} \varphi \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

5. Il suffit de montrer que $\mu([a,b]) = \mu(f^{-1}([a,b])$ pour tout intervalle $[a,b]$ avec $a > 0$. On a
$$f(x) \in [a,b] \quad \iff \quad \exists k \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}, \quad \frac{1}{x} \in [a,b] + k.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\log(2)\ \mu(f^{-1}([a,b])) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{a+k}} \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{a+k}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{b+k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\log(a+k+1) - \log(a+k) \\ &\qquad\qquad - \log(b+k+1) + \log(b+k)\Big) \\ &= \log(b+1) - \log(a+1) \\ &= \log(2)\ \mu([a,b]).\end{aligned}$$

Exercice 2. *Version topologique du théorème de récurrence de Poincaré*

Soit $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une base dénombrable d'ouverts. Soit $i \in \mathbf{N}$; par le théorème de récurrence de Poincaré, il existe $V_i \subset U_i$ avec $\mu(U_i \setminus V_i) = 0$ tel que
$$\forall x \in V_i, \quad |\{n \in \mathbf{N},\ f^n(x) \in U_i\}| = +\infty.$$
On définit l'ensemble $H \subset M$ par
$$H = \bigcup_i (U_i \setminus V_i).$$
Alors H est de mesure nulle. Soit $x \in \complement H$, et $U \ni x$ un voisinage de x. Il existe $i \in \mathbf{N}$ tel que $U_i \subset U$. Alors $x \in V_i$ et donc $|\{n \in \mathbf{N},\ f^n(x) \in U_i\}| = +\infty$, ce qui signifie que x est récurrent.

Exercice 3. *Existence de mesures invariantes*

1. La positivité et l'inégalité triangulaire sont claires. Il reste à montrer que $\mathrm{d}_*(L, L') = 0 \implies L = L'$.

   Si $\mathrm{d}_*(L, L') = 0$ alors $(L - L')(f_i) = 0$ pour tout i. Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Soit i tel que $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Alors

   $$|(L - L')(f)|\,\sqrt{}\text{ä} = |(L - L')(f - f_i)|\,\sqrt{}\text{ä} \leqslant \|L - L'\|_* \|f - f_i\| \leqslant \|L - L'\| \sqrt{}\text{ä}\varepsilon.$$

   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $L = L'$.

   Montrons que d_* engendre la topologie faible, c'est à dire que

   $$L_n \to L \quad *\text{-faiblement} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{d}_*(L_n, L) \to 0.$$

   $\underline{\implies}$: Soit $\varepsilon > 0$, et i tel que $2^{-i} < \varepsilon$. Alors pour tout n assez grand, on a

   $$\sum_{j<i} \frac{|L_n(f_j) - L(f_j)|}{2^j(1 + \|f_j\|)} \leqslant \varepsilon.$$

   D'autre part on a

   $$\sum_{j \geqslant i}^{+\infty} \frac{|L_n(f_j) - L(f_j)|}{2^j(1 + \|f_j\|)} \leqslant 2^{-i}(\|L_n\|_* + \|L\|_*) \leqslant \varepsilon(\|L_n\|_* + \|L\|_*).$$

   Or $\|L_n\| \leqslant 1$ [1], et donc $\mathrm{d}_*(L_n, L) \leqslant 3\varepsilon$ si n est assez grand.

   $\underline{\Longleftarrow}$: Supposons que $\mathrm{d}_*(L_n, L) \to 0$. Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Soit $i \in \mathbf{N}$ tel que $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Alors

   $$\begin{aligned} |L_n(f) - L(f)| \sqrt{}\text{ä} &\leqslant \varepsilon \|L_n - L\|_* + 2^i(1 + \|f_i\|)\mathrm{d}_*(L_n, L) \\ &\leqslant 2\varepsilon + 2^i(1 + \|f_i\|)\mathrm{d}_*(L_n, L). \end{aligned}$$

   Si n est assez grand on obtient donc $|L_n(f) - L(f)| \sqrt{}\text{ä} < 3\varepsilon$, ce qui conclut.

2. Notons B^* la boule unité. Puisqu'elle est métrisable, il suffit de montrer que toute suite de B^* admet une sous-suite qui converge faiblement.

   Soit (L_n) une suite de B^*. On se donne $(f_i) \subset E$ une suite dense de E. Alors $(L_n(f_i))_n$ est bornée pour tout i.

   Par un procédé d'extraction diagonale, il existe (n_k) telle que $L_{n_k}(f_i) \to g_i \overset{\text{not}}{=} L(f_i)$ pour tout i quand $k \to +\infty$.

   Soit maintenant $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. On a, si $\|f - f_i\| \leqslant \varepsilon$,

   $$\begin{aligned} |L_{n_k}(f) - L_{n_\ell}(f)| &\leqslant |L_{n_k}(f) - L_{n_k}(f_i)| + |L_{n_k}(f_i) - L_{n_\ell}(f_i)| \\ &\qquad\qquad + |L_{n_\ell}(f_i) - L_{n_\ell}(f)| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |L_{n_k}(f_i) - L_{n_\ell}(f_i)|. \end{aligned}$$

   Ainsi, si k, ℓ sont assez grands, on a, puisque $L_{n_k}(f_i) \to L(f_i)$,

   $$|L_{n_k}(f) - L_{n_\ell}(f)| \leqslant 3\varepsilon.$$

   Ainsi $(L_{n_k}(f))_k$ est de Cauchy et donc converge, vers un réel noté $L(f)$.

   L'application L est évidemment linéaire et elle vérifie $|L(f)| \sqrt{}\text{ä} \leqslant \lim_k |L_{n_k}(f)| \sqrt{}\text{ä} \leqslant \|f\|$, ce qui montre que $L \in B^*$. Ainsi B^* est compacte.

---

[1] En fait toute suite qui converge faiblement est bornée, c'est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus, qui dit que si E, F sont deux Banach, et que (T_i) est une suite de $\mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\left(\forall x \in E, \quad \sup_i \|T_i(x)\|_F < +\infty\right) \quad \implies \quad \sup_i \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

3. On note $\mathcal{P}(f)$ l'espace des probas sur M qui sont invariantes par f.

   Alors pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{P}(f)$, on a

$$t\mu + (1-t)\nu \in \mathcal{P}(f), \quad t \in [0,1],$$

   donc $\mathcal{P}(f)$ est connexe par arcs donc connexe.

   C'est un fermé de B^* car si $\mu_n \to \mu$ faiblement, on a pour tout $\varphi \in C^0(M)$,

$$\begin{aligned}\int_M (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu &= \lim_n \int_M (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu_n \\ &= \lim_n \int_M \varphi \ \mathrm{d}\mu_n \qquad\qquad \text{car } \mu_n \text{ est } f\text{-invariante} \\ &= \int_M \varphi \ \mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

   et donc $\mu \in \mathcal{P}(f)$.

   Enfin, $\mathcal{P}(f)$ est non vide. En effet, soit $x \in X$; on pose

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}, \quad n \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}.$$

   Alors $\mu_n \in B^*$ et donc il existe $\mu \in B^*$ et une extraction (n_k) telle que $\mu_{n_k} \to \mu$ quand $k \to +\infty$. Comme les μ_{n_k} sont des formes linéaires positives, il en est de même de μ. Le théorème de Riesz nous dit alors que la forme linéaire μ est une mesure.

   Montrons que $\mu \in \mathcal{P}(f)$. Soit $\varphi \in C^0(M)$. Alors

$$\begin{aligned}\mu_{n_k}(\varphi \circ f) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n_k-1} (\varphi \circ f)(f^j(x)) \\ &= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} \varphi(f^j(x)) + \frac{\varphi(f^{n_k}(x)) - \varphi(x)}{n_k} \\ &= \mu_{n_k}(f) + o(1).\end{aligned}$$

   Par conséquent, on obtient $\mu \in \mathcal{P}(f)$ puisque

$$\mu(\varphi \circ f) = \lim_k \mu_{n_k}(\varphi \circ f) = \lim_k \mu_{n_k}(\varphi) = \mu(\varphi).$$

Exercice 4. *Fonctions harmoniques sur une variété fermée*

1. On se ramène au cas $\mathbf{R}^n$ avec une partition de l'unité. On note ϕ_t le flot de X. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. On a, si λ est la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \int (\varphi \circ \phi_t)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g &= \sum_j \int X^j(\partial_j \varphi)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g \\ &= \sum_j \int X^j(\partial_j\varphi)\sqrt{|g|}\mathrm{d}\lambda \\ &= -\sum_j \int \varphi\ \partial_j\left(X^j\sqrt{|g|}\right)\mathrm{d}\lambda \\ &= -\int \varphi\sqrt{|g|}\mathrm{div}_g(X)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi, si la mesure vol_g est préservée par ϕ_t on a nécessairement $\mathrm{div}_g(X) = 0$.

Réciproquement, supposons $\mathrm{div}_g(X) = 0$ et prenons $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Soit $t \in \mathbf{R}$; posons $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \phi_t$.

On a par ce qui précède

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int (\tilde{\varphi} \circ \phi_s) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int (\varphi \circ \phi_t \circ \phi_s) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int (\varphi \circ \phi_{t+s}) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \int (\varphi \circ \phi_s) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g \,. \end{aligned}$$

Par suite l'application $t \mapsto \int (\varphi \circ \phi_t) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g$ est constante pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Si $\varphi \in C_c^0(\mathbf{R}^n)$, on utilise un argument d'approximation pour obtenir $\int (\varphi \circ \phi_t) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g = \int \varphi \; \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g$ pour tout t.

2. Soit $\varphi \in C_c^\infty(M)$ une fonction harmonique. Posons $X = \nabla^g \varphi$; alors $\mathrm{div}_g(X) = 0$.

   En particulier, la mesure vol_g est préservée par le flot de X, noté ϕ_t.

   Par l'**Exercice 2**, on sait que vol_g-presque tout point est récurrent par l'application $f = \phi_1 : M \to M$.

   Par l'**Exercice 1** du TD 8, on sait que pour tout x, $t \mapsto \varphi \circ \phi_t(x)$ est strictement décroissante au voisinage de $t = 0$ si $\nabla^g \varphi(x) \neq 0$.

   Si tel est le cas, alors $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$. Posons $\delta = \varphi(x) - \varphi(f(x))$, et $U = \{y \in M,\ \varphi(y) > \varphi(x) - \delta/2\}$.

   Alors U est un voisinage de x et comme $t \mapsto \varphi \circ \phi_t(x)$ décroit, on a $f^k(x) \notin U$ pour tout $k \geqslant 1$, donc x n'est pas récurrent.

   Ainsi, puisque vol_g-presque tout point est récurrent, on a

$$\nabla^g \varphi = 0 \quad \mathrm{vol}_g\text{-presque partout.}$$

   Mais $\nabla^g \varphi$ est lisse et dans les cartes on a $\mathrm{vol}_g = \sqrt{|g|}\mathrm{d}\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue, ce qui implique que $\nabla^g \varphi = 0$, et donc φ est constante.