# La fonction Zêta de Ruelle pour les flots d'Anosov

Yann Chaubet

25 septembre 2018

## Introduction

Pour compter les nombres premiers, Riemann les combine pour former la fonction $\zeta_{\mathrm{Riem}}$ définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$\zeta_{\mathrm{Riem}}(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. C'est la fonction zêta de Riemann. Ses propriétés analytiques sont étroitement liées à la répartition des nombres premiers : l'hypothèse de Riemann, qui stipule que les zéros non triviaux de $\zeta_{\mathrm{Riem}}$ (c'est à dire ceux qui ne sont pas des entiers pairs strictement négatifs) ont tous une partie réelle égale à 1/2, est équivalente à la validité du développement asymptotique

$$\operatorname{card}\{p \in \mathcal{P} \ : \ p \leqslant x\} = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + \mathcal{O}(x^{1/2+\delta}), \quad x \to \infty, \tag{1}$$

pour tout nombre $\delta$ strictement positif.

Pour étudier la distribution des longueurs des géodésiques fermées d'une surface à courbure négative, on peut, dans cet esprit, définir des fonctions zêta dynamiques qui sont des analogues de la fonction zêta de Riemann, par exemple en remplaçant les nombres premiers par les (logarithmes des) longueurs des géodésiques fermées primitives (c'est-à-dire qu'on ne fait qu'une seule fois le tour de chaque géodésique fermée) pour obtenir la fonction zêta de Ruelle

$$\zeta_{\mathrm{Ru}}(s) = \prod_{\gamma^\sharp} \left(1 - \mathrm{e}^{-s\ell(\gamma^\sharp)}\right), \quad \Re(s) \gg 1, \tag{2}$$

où le produit est pris sur les géodésiques fermées primitives de $X$ et où $\ell(\gamma^\sharp)$ est la période de $\gamma^\sharp$ (voir section pour la justification de la convergence du produit). A l'instar du théorème des nombres premiers, on peut montrer grâce à $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ (bien que la preuve originale de Margulis [Mar69] n'y fasse pas appel) le théorème des géodesiques primitives

$$N(L) \sim \frac{\mathrm{e}^{hL}}{hL},$$

où $N(L)$ est le nombre de géodésiques fermées primitives de longueurs plus petites que $L$ et $h > 0$ est l'entropie topologique du flot.

Dans la section 1 nous définissons les fonctions zêta de Selberg et de Ruelle, ainsi que les flots d'Anosov. Dans la section 2 nous décrivons les récentes avancées faites sur le prolongement méromorphe de ces fonctions. Dans la section 3 nous explicitons la construction de certains espaces de Sobolev anisotropes introduits par Faure-Sjöstrand [FS11], importants pour étudier les propriétés spectrales du générateur du flot. Nous donnons dans la section 4 quelques arguments-clés utilisés par Dyatlov-Zworski [DZ13] pour prolonger méromorphiquement la fonction zêta de Ruelle d'un flot d'Anosov à tout le plan complexe. Enfin dans la section 5 nous évoquons les liens entre les fonctions zêta dynamiques et la topologie environnante.

# Contents



# 1 Les fonctions zêta dynamiques d'un flot

## 1.1 La fonction zêta de Selberg

En 1956, Selberg s'est intéressé au spectre géodésique d'une surface hyperbolique $S$, c'est à dire à l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées d'une surface à courbure constante $\kappa = -1$. Dans son article [Sel56], il introduit la fonction zêta

$$\zeta_{\mathrm{Sel}}(s) = \prod_{\gamma^\sharp} \prod_{k \geqslant 0} \left(1 - \mathrm{e}^{-(z+k)\ell(\gamma^\sharp)}\right), \quad \Re(s) \gg 1,$$

où le premier produit porte sur l'ensemble des géodésique fermées primitives (celles qui ne font qu'un seul tour sur elles mêmes), et où $\ell(\gamma^\sharp)$ est la longueur de la géodésique $\gamma^\sharp$ (le signe $\sharp$ est utilisé pour signifier que la géodésique $\gamma^\sharp$ est primitive).

**Théorème 1.1** (Selberg, 1956)**.** *La fonction $\zeta_{\mathrm{Sel}}$ s'étend méromorphiquement à tout le plan complexe et ses zéros non triviaux sont de la forme*

$$s = 1, \quad s = \frac{1}{2} \pm i\rho_j, \quad j \in \mathbb{N}_{\geqslant 1},$$

*où $\rho_j^2 + 1/4 = \lambda_j$ pour $j \geqslant 0$ et $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots \to \infty$ sont les valeurs propres du Laplacien hyperbolique.*

Cette formule s'obtient grâce à la formule des traces de Selberg qui s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\rho_n) = (g-1)\int_{-\infty}^{\infty} \rho \tanh(\pi\rho)h(\rho)\mathrm{d}\rho + \sum_{\gamma}\sum_{m\neq 0} \frac{\ell(\gamma)}{4\sinh(|m|\ell(\gamma)/2)}\hat{h}(m\ell(\gamma))$$

pour toute fonction test $h$ paire qui s'étend analytiquement à une bande $\{|\Im(\rho)| < c\}$ avec $2c > 1$, où

$$\hat{h}(\tau) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\mathrm{e}^{i\tau\rho}\mathrm{d}\rho$$

est la transformée de Fourier de $h$ et où $g$ est le genre de $S$. Cette description des zéros de $\zeta_{\mathrm{Sel}}$ constitue un analogue de l'hypothèse de Riemann dans ce cadre. Huber [Hub59] a montré qu'elle implique un résultat de comptage des géodésiques dans l'esprit de (1).

## 1.2 Flots d'Anosov

La définition de la fonction zêta de Selberg s'étend en fait à un cadre plus large. Soit $M$ une variété compacte (pas forcément de dimension 2) et $X$ un champ de vecteur sur $M$, de flot noté $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

**Définition 1.2.** On dit que $X$ génère un flot d'Anosov si en tout point $x \in M$ on a une décomposition

$$T_xM = \mathbb{R}X(x) \oplus E_s(x) \oplus E_u(x)$$

préservée par le flot, c'est-à-dire que $(\mathrm{d}\phi_t)_x(E_u(x)) = E_u(\phi_t(x))$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in M$ et idem pour $E_s$, satisfaisant la propriété suivante. Pour toute métrique $|\cdot|$ sur $TM$, il existe $C, \theta > 0$ tels que

$$\begin{aligned} |(\mathrm{d}\phi_t)_x(v_s)| &\leqslant C\mathrm{e}^{-\theta t}|v_s|, &\quad t \geqslant 0, \quad v_s \in E_s(x), \\ |(\mathrm{d}\phi_t)_x(v_u)| &\leqslant C\mathrm{e}^{-\theta|t|}|v_u|, &\quad t \leqslant 0, \quad v_u \in E_u(x). \end{aligned} \tag{3}$$

En d'autres termes, on demande à ce que l'on puisse décomposer l'espace tangent en une somme directe comprenant la direction du flot et des sous-espaces sur lesquels le flot est dilatant ($E_u$) ou contractant ($E_s$).

**Remarque 1.3.** La situation typique est le cas où $M = S\Sigma$ est le fibré unitaire tangent d'une surface compacte à courbure négative, et où $X$ est le champ géodésique sur $M$. Dans ce cas, on peut montrer que $X$ est d'Anosov [Ano67].

Dans toute la suite, $X$ désignera le générateur d'un flot d'Anosov sur une variété compacte $M$.

### 1.3 La fonction zêta de Ruelle

Généralisant le cas d'un flot géodésique, Ruelle [Rue76] propose en 1976 d'étudier une fonction zêta, la fonction $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ définie dans (2), mais où cette fois le produit est pris sur les orbites fermées primitives du champ d'Anosov $X$. C'est un analogue plus direct de la fonction zêta de Riemann. Les fonctions zêta de Selberg et de Ruelle sont reliées par les relations

$$\zeta_{\mathrm{Ru}}(s) = \frac{\zeta_{\mathrm{Sel}}(s)}{\zeta_{\mathrm{Sel}}(s+1)}, \qquad \zeta_{\mathrm{Sel}}(s) = \prod_{p=0}^{\infty} \zeta_{\mathrm{Ru}}(s+p).$$

La convergence du produit dans (2) pour un $s$ ayant une partie réelle assez grande vient du fait que le nombre d'orbite d'un flot d'Anosov a une croissance exponentielle [Sin66] :

**Proposition 1.4.** *Soit $N(T)$ le nombre d'orbites périodiques de périodes inférieures ou égales à $T$. Alors*

$$\frac{1}{T}\log N(T) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} h > 0.$$

*Le nombre $h$ est appelé entropie topologique du flot.*

Il est alors naturel de se poser la

**Question 1.5.** Peut-on étendre $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ ou $\zeta_{\mathrm{Sel}}$ méromorphiquement à tout le plan complexe dans le cadre général des flots d'Anosov ?

Smale écrit à ce sujet (en fait au sujet des flots de type A qui généralisent les Anosov) en 1967 [Sma67] “An affirmative answer would be roughly necessary and sufficient condition for $\zeta_{\mathrm{Sel}}$ to be useful. I must admit a positive answer would be a little shocking !”.

## 2 Bref survol historique sur le prolongement de la fonction zêta

Nous relatons brièvement dans ce paragraphe les avancées réalisés depuis 1967 sur la question 1.5. Dans son article [Rue76], Ruelle montre que $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$ si le flot ainsi que ses fibrés stables et instables ($E_s$ et $E_u$ dans le paragraphe précédent) sont analytiques. Ensuite Rugh [Rug96] en dimension 3 puis Fried [Fri95] en toutes dimensions ont montré que le résultat était vrai sans supposer d'analyticité sur les fibrés stables et instables (mais toujours sur le flot). Pour des flots de régularité $\mathcal{C}^\infty$, on sait que $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ est analytique sur $\{\Re(s) > h\}$ où $h$ est l'entropie topologique ; dans le cas où le flot est faiblement mélangeant, Ruelle et Parry-Pollicott ont montré que $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ s'étend méromorphiquement à un voisinage de $\{\Re(s) > h\}$ puis Pollicott a montré que l'on pouvait aller jusqu'à une bande $\{\Re(s) > 1-\varepsilon\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Voir [PP90, Chapter 9] pour plus de détails et de références. Ces résultats sont typiquement obtenus en "codant" la dynamique avec des partitions de Markov pour relier la fonction zêta à des déterminants dynamiques ou à déterminants Fredholm de certains opérateurs dont on sait qu'ils se comportent bien (on ne rentrera pas dans les détails ici). Cependant, ces méthodes ne prennent pas en compte la régularité de la dynamique et on sait grâce à Kitaev [Kit99] (au moins pour le cas des difféomorphismes d'Anosov) que la régularité de la dynamique est étroitement liée à jusqu'où l'on peut étendre les déterminants dynamiques.

Au début des années 2000, Blank, Keller et Liverani [BKL02] ont introduit des espaces de Banach anisotropes adaptés à un difféomorphisme hyperbolique $T$ sur lequel l'opérateur de transfert

$$f \mapsto f \circ T$$

est quasi-compact ; cela a conduit à beaucoup de développements dans ce sens [Bal04, GL06, BT07]. Des espaces anisotropes adaptés aux flots d'Anosov [Liv04, BL07] ont également été développés, sur lesquels le générateur $X$ du flot $\phi_t$, vu comme un opérateur différentiel d'ordre 1 défini par

$$f \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \phi_t,$$

a une résolvante $(X - z)^{-1}$ quasi-compacte (pour $z$ dans une certaine région). Plus récemment, Faure-Roy-Sjöstrand [FRS08] ont introduit une approche microlocale pour construire des espaces de Sobolev anisotropes adaptés aux difféomorphismes d'Anosov ; puis Faure-Sjöstrand [FS11] ont construit de tels espaces pour les flots d'Anosov. Ces espaces fournissent la bonne régularité pour étudier le générateur $X$ du flot puisqu'il devient un opérateur Fredholm quand on le restreint à ces derniers ; cela permet de montrer le

**Théorème 2.1** ([BL07, FS11])**.** *Pour un flot d'Anosov $X$, la résolvante $(-iX - \lambda)^{-1}$, vue comme un opérateur $\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{D}'(M)$, bien définie pour $\Im(\lambda)$ assez grand, a un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec des pôles de multiplicités finies. Ces pôles sont appelés résonances de Ruelle.*

Ces techniques modernes ont permis à Giuletti-Liverani-Pollicott, puis à Dyatlov-Zworski, en reliant la fonction zeta avec la résolvante agissant sur des espaces de formes, de démontrer le

**Théorème 2.2** ([GLP13, DZ13])**.** *La fonction zeta de Ruelle d'un flot d'Anosov lisse s'étend méromorphiquement à tout le plan complexe.*

Il est de plus montré dans [GLP13] que pour un flot de régularité $\mathcal{C}^k$, $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ s'étend méromorphiquement à une bande $\{\Re(s) > h - ck\}$ où $c$ est une constante déterminée par la décomposition d'Anosov. Ce papier est une extension de [GL06, BL07] tandis que [DZ13] utilise un point de vue semi-classique basé sur [FS11]. Cette approche a finalement permis à Dyatlov-Guillarmou [DG18] de prolonger la fonction zêta pour les systèmes ouverts, puis pour les flots de type A en général. C'est plutôt ces méthodes que nous allons décrire dans ce texte.

# 3 Espaces de Sobolev anisotropes

Dans ce qui suit, $M$ est une variété compacte, $X$ est un champ d'Anosov sur $M$ et $\phi_t$ est le flot de $X$. Nous résumons ici la première partie de [FS11].

## 3.1 Dynamique sur $T^*M$

Soit $\Phi_t \in \mathrm{Diff}(T^*M)$ le relevé du flot $\phi_t$ au fibré cotangent de $M$, i.e.

$$\Phi_t(x,\xi) = \left(\phi_t(x),^T (\mathrm{d}\phi_t)_x^{-1}\xi\right), \quad (x,\xi) \in T^*M, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

En fait, ce relevé est aussi le flot Hamiltonien (avec la structure symplectique canonique sur $T^*M$) associé à l'Hamiltonien $H \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$ défini par

$$H(x,\xi) = \langle \xi, X(x) \rangle, \quad (x,\xi) \in T^*M.$$

Nous noterons $\mathbf{X}$ le générateur de ce flot. On notera aussi

$$T^*M = E_0^* \oplus E_u^* \oplus E_s^*$$

la décomposition duale à $TM = E_0 \oplus E_s \oplus E_u$, dans le sens où

$$E_0^*(E_u \oplus E_s) = 0, \quad E_s^*(E_s \oplus E_0) = 0, \quad E_u^*(E_u \oplus E_0) = 0.$$

Notons que cela ne correspond pas à la définition habituelle des duaux ($E_s^*$ et $E_u^*$ sont échangés) mais cela est justifié par les équations

$$\begin{aligned} |\Phi^t(x,\xi_s)| &\leqslant C\mathrm{e}^{-\theta t}, \quad t \geq 0, \quad \xi_s \in E_s^*(x), \\ |\Phi^t(x,\xi_u)| &\leqslant C\mathrm{e}^{-\theta |t|}, \quad t \leq 0, \quad \xi_u \in E_u^*(x). \end{aligned} \tag{5}$$

## 3.2 Fonction de fuite

Le principal objet dans construction des espaces de Sobolev anisotropes est la fonction de fuite $g$ définit sur $T^*M$, qui décroît strictement le long du flot loin de la direction stable. Nous dirons qu'une fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$ est homogène de degré 0 si $h(x,\lambda\xi) = h(x,\xi)$ pour $\lambda \geqslant 1$ et $(x,\xi) \in T^*M$ avec $|\xi|$ assez grand.

**Proposition 3.1.** *Soient $\Gamma_0$, $\Gamma_u$ et $\Gamma_s$ des (petits) voisinages coniques de $E_0^*$, $E_u^*$ et $E_s^*$. Il existe une constante $c$, une fonction $m \in \mathcal{C}^\infty(T^*M, [-1,1])$ homogène de degré 0 et une norme $|\cdot| \in \mathcal{C}^\infty(T^*M \setminus 0)$ telles que, avec $g(x,\xi) = m(x,\xi)\log\langle\xi\rangle$ (on a noté $\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$), on a :*

1. *$m \equiv 1$ et $m \equiv -1$ sur $\Gamma_s$ et $\Gamma_u$ respectivement, pour $|\xi|$ assez grand.*
2. *$\mathbf{X}(g) \leqslant 0$ partout.*
3. *$\mathbf{X}(g) \leqslant -c$ en dehors de $\Gamma_0$ pour $|\xi|$ assez grand.*

Cette propriété de décroissance de la fonction de fuite induit des propriétés de positivité pour certains opérateurs obtenus via des commutateurs.

## 3.3 Espaces anisotropes

A l'instar des espaces de Sobolev qui sont définis (localement dans les cartes) par

$$H^s(M) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(M) \;\middle|\; (I - \Delta)^{s/2} u \in L^2(M) \right\},$$

on définit de même pour $s > 0$ l'espace anisotrope $\mathcal{H}^s$ par

$$\mathcal{H}^s = \left\{ u \in \mathcal{D}'(M) \;\middle|\; \mathrm{Op}\left(\langle \xi \rangle^{sm}\right) u \in L^2(M) \right\},$$

où $m$ est la fonction définie dans la section précédente et $\mathrm{Op}\left(\langle \xi \rangle^{sm}\right)$ est l'opérateur défini localement dans les cartes par

$$\left[\mathrm{Op}\left(\langle \xi \rangle^{sm}\right) u\right](x) = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{-ix\xi} \langle \xi \rangle^{sm(x,\xi)} \hat{u}(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{6}$$

Notons l'analogie avec la formule

$$\left[(I - \Delta)^{s/2} u\right](x) = \left[\mathrm{Op}\left(\langle \xi \rangle^{s}\right) u\right](x) = (2\pi)^{-n} \int \mathrm{e}^{-ix\xi} \langle \xi \rangle^{s} \hat{u}(\xi) \mathrm{d}\xi \;;$$

la seule différence est que dans (6), la puissance $sm(x,\xi)$ varie avec les codirections $\xi$. Autrement dit, les distributions de $\mathcal{H}^s$ sont régulières dans la direction stable et singulières dans la direction instable : $u \in \mathcal{H}^s$ est microlocalement dans $H^s(M)$ près de $E_s^*$ et microlocalement dans $H^{-s}(M)$ près de $E_u^*$. Nous avons les inclusions

$$H^s \subset \mathcal{H}^s \subset H^{-s}.$$

La raison d'être de ces espaces est le résultat qui suit, dont la démonstration repose sur la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et sur le fait que la fonction de fuite décroisse le long du flot Hamiltonien. Il affirme que le générateur $X$ du flot $\phi_t$, vu comme un opérateur différentiel d'ordre 1, se comporte bien sur ces espaces.

**Proposition 3.2.** *Soit $P = -iX$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s > 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Im(\lambda) > C - Cs$, l'opérateur*

$$P - \lambda : \mathcal{D}_s(P) \to \mathcal{H}^s,$$

*où $\mathcal{D}_s(P) = \{u \in \mathcal{H}^s \;|\; Pu \in \mathcal{H}^s\}$ est le domaine de $P$, est Fredholm d'indice 0.*

En particulier, puisque $P - \lambda$ est inversible pour $\Im(\lambda) \gg 1$ d'inverse (simple vérification)

$$R(\lambda) := (P - \lambda)^{-1} = i \int_0^\infty \mathrm{e}^{i\lambda t} \phi_{-t}^* \mathrm{d}t,$$

$R(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement avec pôles de multiplicités finies à la région $\{\Im(\lambda) > C - Cs\}$ grâce à la théorie Fredholm analytique. Comme $s > 0$ est arbitraire, on en déduit le théorème 2.1.

Puisque $P$ écrase les directions stables et dilate les directions instables, il envoie des espaces de régularités élevées dans des espaces de régularités plus faibles quand il agit sur $\mathcal{H}^s$ ; les inclusions $H^s \hookrightarrow H^{s'}$ étant compactes pour $s > s'$, cela justifie - au moins moralement - le fait que les espaces $\mathcal{H}^s$ soient adaptés pour étudier l'opérateur $P$.

# 4 Prolongement de la fonction zêta

## 4.1 Factorisation de la fonction zêta par les déterminants dynamiques

Pour prolonger la fonction zêta méromorphiquement, on commence par la relier aux déterminants dynamiques $\zeta_k$ ; un calcul direct montre que

$$\zeta_{\mathrm{Ru}}(s) = \prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k(s)^{(-1)^{k+q}},$$

où $q$ est la dimension du fibré stable et

$$\zeta_k(s) = \exp\left(-\sum_\gamma \frac{\ell(\gamma^\sharp)\mathrm{e}^{-s\ell(\gamma)}\mathrm{tr}\bigwedge^k P_\gamma}{\ell(\gamma)|\det(I-P_\gamma)|}\right), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

où $P_\gamma$ est l'application de Poincaré linéarisée de l'orbite périodique $\gamma$, i.e. $P_\gamma = \mathrm{d}\phi_{-\ell(\gamma)}(x_0)|_{E_u(x_0)\oplus E_s(x_0)}$ pour $x_0 \in \mathrm{Im}(\gamma)$ (à noter qu'ici la somme porte sur toutes les orbites périodiques ; si $\gamma$ est une géodésique, on a noté $\gamma^\sharp$ la géodésique primitive qui la génère). Il suffit donc de prolonger tous les $\zeta_k$ pour prolonger la fonction zêta. En posant

$$f_k(s) = \frac{\zeta_k'(s)}{\zeta_k(s)} = \sum_\gamma \frac{\ell(\gamma^\sharp)\mathrm{e}^{-s\ell(\gamma)}\mathrm{tr}\bigwedge^k P_\gamma}{|\det(I-P_\gamma)|},$$

il suffit de montrer que $f_k$ a un prolongement méromorphe, que ses pôles sont simples avec résidus entiers.

## 4.2 Lien entre les déterminants dynamiques et la résolvante

Pour relier les déterminants dynamiques à la résolvante, on fait d'abord agir $\mathbf{P} = -i\mathcal{L}_X$ sur les sections des fibrés $\Omega_0^k = \left\{\sqrt{}\text{ä}\alpha \in \bigwedge^k T^*M | \sqrt{}\text{ä}\iota_X\alpha = 0\right\}$, où $\iota$ désigne le produit intérieur. On notera $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}|_{\mathcal{C}^\infty(M,\Omega_0^k)}$. On montre comme à la section 3 (en utilisant les Sobolev anisotropes) que $\mathbf{R}_k(\lambda) = (\mathbf{P}_k - \lambda)^{-1} : \mathcal{C}^\infty(M,\Omega_0^k) \to \mathcal{D}'(M,\Omega_0^k)$, bien défini pour $\Im(\lambda) \gg 1$, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe.

Soit $\tau > 0$ tel que $\tau < \ell(\gamma)$ pour toute orbite périodique $\gamma$. La formule des traces de Guillemin [Gui77] permet de montrer que pour $\Re(s) \gg 1$,

$$f_k(s) = \mathrm{tr}^\flat\left(\int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-st}\phi_{-t}^*\mathrm{d}t\right) = -i\mathrm{tr}^\flat\left(\mathrm{e}^{-\tau s}\phi_{-\tau}^*\mathbf{R}_k(-is)\right), \tag{7}$$

où $\mathrm{tr}^\flat$ désigne la trace flat, que nous ne définirons pas ici, qui est une généralisation de la trace pour les opérateurs $\mathcal{C}^\infty \to \mathcal{D}'$, bien définie sous réserve que des conditions de front d'onde soient vérifiées, voir [DZ13].

En utilisant des techniques d'analyse semi-classique, notamment la propagation des singularités semi-classiques et le contrôle des singularités près des sources radiales suivant le travail de Melrose [Mel94] et Vasy [Vas13], Dyatlov-Zworski montrent que la trace flat de l'extension méromorphe de $\mathbf{R}_k(\lambda)$ est bien définie [DZ13, Proposition

3.3]. Ainsi le membre de droite de (7) admet une extension méromorphe à $\mathbb{C}$ ; on montre alors qu'un pôle en une résonance $\lambda_0$ est simple avec résidu entier égal au rang $m_k(\lambda_0)$ du projecteur

$$\Pi_k = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\lambda_0} \mathbf{R}_k(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

Ceci permet donc de montrer que $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et que l'ordre de $\zeta_{\mathrm{Ru}}$ en une résonance $\lambda_0$ est

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+q}m_k(\lambda_0). \tag{8}$$

# 5 Fonctions zêta et topologie

Nous décrivons pour terminer les liens étroits qu'entretiennent les fonctions zêta avec la topologie environnante.

## 5.1 La fonction zêta de Ruelle en 0 pour les surfaces

En 2016, Dyatlov-Zworski, en utilisant (8), ont montré le

**Théorème 5.1** ([DZ17]). *La fonction zêta de Ruelle d'un flot géodésique d'une surface compacte $\Sigma$ à courbure négative s'annule en $0$ à l'ordre exactement $|\chi(\Sigma)|$ où $\chi(\Sigma)$ est la caractéristique d'Euler de $\Sigma$.*

En fait, ils montrent plus généralement que pour un flot d'Anosov de contact sur une variété de dimension 3 (i.e. pour lequel il existe une 1-forme $\alpha$ telle que $\alpha(X) = 1$, $\iota_X \mathrm{d}\alpha = 0$ et telle que $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha$ soit une forme volume, l'exemple type étant le flot géodésique d'une surface sur son fibré unitaire tangent), l'ordre de la fonction zêta en 0 est $2 - b_1(M)$, où $b_1(M)$ est le premier nombre de Betti de $M$. En particulier, le spectre géodésique d'une surface à courbure négative détermine le genre de la surface. Ce résultat était déjà connu pour les surfaces hyperboliques, mais pas en courbure variable. Récemment, Hadfield [Had18] a montré que pour une surface à bord, l'ordre d'annulation était $1 - \chi(\Sigma)$. Le comportement de la fonction zêta en 0 est donc lié à la topologie de la surface. Une question naturelle (ouverte) se pose alors : a-t-on un analogue de ce résultat pour les flots d'Anosov en général ? Pour les flots de type A ?

## 5.2 La conjecture de Fried

Un autre champ de recherche est l'étude de la fonction zêta twistée associée à une représentation unitaire et acyclique $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$ donnée par le transport parallèle d'une connexion plate sur un fibré $E$ sur $M$. On définit la fonction

$$\zeta_\rho(s) = \prod_{\gamma^\sharp} \det\left(1 - \varepsilon(\gamma^\sharp)\rho([\gamma^\sharp])\mathrm{e}^{-s\ell(\gamma^\sharp)}\right),$$

où le produit est pris sur les orbites périodiques primitives d'un champ d'Anosov $X$ sur $M$, et où $\varepsilon(\gamma^\sharp)$ vaut 1 si $E_u(\gamma)$ est orientable et $-1$ sinon. La conjecture de Fried stipule qu'il existe un lien entre la valeur en 0 de cette fonction zêta dynamique et la torsion de Reidemeister $\tau_\rho(M)$, qui est un invariant du fibré plat $E$ (voir [Mne14] pour plus de détails sur la torsion). Fried a montré que cette conjecture était vraie pour les flots géodésiques sur les variétés hyperboliques (i.e. $M = SN$ est le fibré unitaire tangent d'une variété hyperbolique $N$) en utilisant la formule des traces de Selberg ; plus précisément il montre la formule [Fri86]

$$|\zeta_\rho(0)^{(-1)^n}| = \tau_\rho(M),$$

où $\dim M = 2n+1$. Récemment, Dang-Guillarmou-Rivière-Shen [DGRS18], en utilisant des techniques d'analyse semi-classiques dans l'esprit de [FS11] et [DZ13], ont répondu à la conjecture de Fried en dimension 3 pour les flots d'Anosov préservant une forme volume en montrant que si $b_1(M) \neq 0$, ou si $\ker\left(I - \varepsilon_\gamma^j \rho([\gamma])\right) = 0$, $j \in \{0,1\}$, pour une certaine orbite périodique $\gamma$, alors

$$|\zeta_\rho(0)^{-1}|\sqrt{\text{ä}} = \tau_\rho(M).$$

Ce résultat était déjà connu pour les flots d'Anosov analytiques et transitifs en dimension 3 grâce à Sanchez-Morgado [SM96], ce qui a permis d'utiliser un argument d'approximation. Il est aussi montré dans [DGRS18], en dimension plus grande que 3, l'invariance de $\zeta_\rho(0)$ par rapport à des petites perturbations du flot sous la condition qu'il n'y a pas de résonance en $s = 0$. Le problème reste cependant ouvert en toute généralité.

# References


[Ano67] Dmitry Victorovich Anosov. Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova*, 90:3–210, 1967.

[Bal04] Viviane Baladi. Anisotropic sobolev spaces and dynamical transfer operators: C^ infty foliations. *arXiv preprint math/0408430*, 2004.

[BKL02] Michael Blank, Gerhard Keller, and Carlangelo Liverani. Ruelle–perron–frobenius spectrum for anosov maps. *Nonlinearity*, 15(6):1905, 2002.

[BL07] Oliver Butterley and Carlangelo Liverani. Smooth anosov flows: correlation spectra and stability. *J. Mod. Dyn*, 1(2):301–322, 2007.

[BT07] Viviane Baladi and Masato Tsujii. Anisotropic hölder and sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms (espaces anisotropes de types hölder et sobolev). In *Annales de l'institut Fourier*, volume 57, pages 127–154, 2007.

[DG18] Semyon Dyatlov and Colin Guillarmou. Afterword: Dynamical zeta functions for axiom a flows. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(3):337–342, 2018.

[DGRS18] Nguyen Viet Dang, Colin Guillarmou, Gabriel Rivière, and Shu Shen. Fried conjecture in small dimensions. *To appear*, 2018.

[DZ13] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. Dynamical zeta functions for anosov flows via microlocal analysis. 2013.

[DZ17] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. Ruelle zeta function at zero for surfaces. *Inventiones mathematicae*, 210(1):211–229, 2017.

[Fri86] David Fried. Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds. *Inventiones mathematicae*, 84(3):523–540, 1986.

[Fri95] David Fried. Meromorphic zeta functions for analytic flows. *Communications in mathematical physics*, 174(1):161–190, 1995.

[FRS08] F. Faure, N. Roy, and J. Sjöstrand. Semi-classical approach for anosov diffeomorphisms and ruelle resonances. *Open Math. Journal*, 2008.

[FS11] Frédéric Faure and Johannes Sjöstrand. Upper bound on the density of ruelle resonances for anosov flows. *Communications in Mathematical Physics*, 308(2):325, Oct 2011.

[GL06] Sébastien Gouëzel and Carlangelo Liverani. Banach spaces adapted to anosov systems. *Ergodic Theory and dynamical systems*, 26(1):189–217, 2006.

[GLP13] Paolo Giulietti, Carlangelo Liverani, and Mark Pollicott. Anosov flows and dynamical zeta functions. *Annals of Mathematics*, pages 687–773, 2013.

[Gui77] Victor Guillemin. Lectures on spectral theory of elliptic operators. *Duke Math. J.*, 44(3):485–517, 09 1977.

[Had18] Charles Hadfield. Zeta function at zero for surfaces with boundary. *arXiv preprint arXiv:1803.10982*, 2018.

[Hub59] Heinz Huber. Zur analytischen theorie hyperbolischer raumformen und bewegungsgruppen. *Mathematische Annalen*, 138(1):1–26, 1959.

[Kit99] A Yu Kitaev. Fredholm determinants for hyperbolic diffeomorphisms of finite smoothness. *Nonlinearity*, 12(1):141, 1999.

[Liv04] Carlangelo Liverani. On contact anosov flows. *Annals of mathematics*, pages 1275–1312, 2004.

[Mar69] Gregorii A Margulis. Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. *Functional analysis and its applications*, 3(4):335–336, 1969.

[Mel94] Richard B Melrose. Spectral and scattering theory for the laplacian on asymptotically euclidian spaces. 1994.

[Mne14] P. Mnev. *preprint arXiv:1406.3705*, 2014.

[PP90] W. Parry and M. Pollicott. *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics.* Société mathématique de France, 1990.

[Rue76] David Ruelle. Zeta-functions for expanding maps and anosov flows. *Inventiones mathematicae*, 34(3):231–242, 1976.

[Rug96] Hans Henrik Rugh. Generalized fredholm determinants and selberg zeta functions for axiom a dynamical systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 16(4):805–819, 1996.

[Sel56] A Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc.*, 20:47–87, 1956.

[Sin66] Ya. G. Sinai. Asymptotic behavior of closed geodesics on compact manifolds with negative curvature. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1966.

[SM96] Héctor Sánchez-Morgado. R-torsion and zeta functions for analytic anosov flows on 3-manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(3):963–973, 1996.

[Sma67] Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.

[Vas13] András Vasy. Microlocal analysis of asymptotically hyperbolic and kerr-de sitter spaces (with an appendix by semyon dyatlov). *Inventiones mathematicae*, 194(2):381–513, 2013.