

Exercice 1.

- 1) On prend pour  $X_n$  une suite qui tend vers  $X_\infty = (20, 20)$  en restant dans  $x-y \geq 0$ :  
par exemple  $X_n = (20 + \frac{1}{n}, 20)$  et pour  $\tilde{X}_n$  une suite qui tend vers  
 $X_\infty$  en restant dans  $x-y \leq 0$ , par exemple  $\tilde{X}_n = (20 - \frac{1}{n}, 20)$ .

On a comme  $f$  et  $g$  sont continues :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n) = f(20, 20)$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\tilde{X}_n) = g(20, 20)$ . Comme  $X_n$  est dans  $\{x-y \geq 0\}$   $f(X_n) = h(X_n)$ ,

et comme  $\tilde{X}_n$  est dans  $\{x-y \leq 0\}$  on a  $g(\tilde{X}_n) = h(\tilde{X}_n)$ .

On a donc 2 suites  $(X_n), (\tilde{X}_n)$  avec  $\lim X_n = \lim \tilde{X}_n = (20, 20)$  mais

$\lim h(X_n) = f(20, 20)$  et  $\lim h(\tilde{X}_n) = g(20, 20) \neq f(20, 20)$ .

Par un résultat vu en cours, cela contredit l'hypothèse que  $h$  est continue au point  $(20, 20)$ .

- 2)  $h$  est continue en tout point  $(x, y)$  avec  $x \neq y$ , car  $f$  et  $g$  sont continues.

Soit  $X_0 = (x_0, y_0)$  et  $\varepsilon > 0$  fixé. Comme  $f$  est continue en  $X_0$ , il existe  $\delta$  tel que si  $d(X, X_0) < \delta$  alors  $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$ .

De même comme  $g$  est continue en  $X_0$ , il existe  $\delta'$  tel que si  $d(X, X_0) < \delta'$  alors  $|g(X) - g(X_0)| < \varepsilon$ .

Soit  $\delta''$  le plus petit des deux réels  $\delta, \delta'$ . Si  $d(X, X_0) < \delta''$  on a  $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$  et  $|g(X) - g(X_0)| < \varepsilon$ . Comme  $f(X_0) = g(X_0) = h(X_0)$  et comme  $h(X)$  est égal soit à  $f(X)$  soit à  $g(X)$  (selon le signe de  $x-y$ ,  $X = (x, y)$ ) on a  $|h(X) - h(X_0)| < \varepsilon$ .

On a donc montré que  $h$  est continue en  $X_0$ . #

Exercice 2

- 1) soit  $\vec{u} = (a, b)$ , on doit montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t}$  existe.

$$\text{si } a \neq 0 \quad \text{on a} \quad \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = \frac{(tb)^2}{ta/t} = \frac{b^2}{a}.$$

si  $a = 0$   $\frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = 0$ . Donc  $f$  est bien dérivable en  $(0,0)$  dans la direction  $\vec{u}$ .

- 2) on prend  $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}})$   $f(x_n) = 1$   $x_n \rightarrow (0,0)$  mais  $f(0,0) = 0$  donc  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$ .

Exercice 3

- 1)  $\varphi_{20}$  est linéaire:  $\varphi_{20}(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(20) = f(20) + \lambda g(20) = \varphi_{20}(f) + \lambda \varphi_{20}(g)$  pour  $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\varphi_{20} \text{ est continue: on a } |\varphi_{20}(f)| = |f(20)| \leq \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| = \|f\|_{\infty}$$

Par le résultat du cours sur les applications linéaires continues,  $\varphi_{20}$  est bien continue.

- 2)  $U_{20}$  est l'image inverse de  $] -1, 1[$  par  $\varphi_{20}$ :

$$(f \in U_{20} \text{ssi } \varphi_{20}(f) \in ] -1, 1[ ). \text{Donc comme}$$

$] -1, 1[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi_{20}: E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue,

$U_{20}$  est un ouvert de  $E$ .

Exercice 4.

- 1) on a  $|f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_{\infty} \quad \forall x \in [0, +\infty[$ . Les inégalités

longes passent à la limite, donc

$$\left| \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_{\infty}$$

2a) pour  $n, p \in \mathbb{N}$  on a  $|l_n - l_p| \leq \|f_n - f_p\|_\infty$ .

Comme  $(f_n)$  converge dans  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $(f_n)$  est de Cauchy : pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon$  pour  $n, p \geq N$ .  
on a donc aussi  $|l_n - l_p| < \varepsilon$  pour  $n, p \geq N$ , la suite  $(l_n)$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ .

2b) Par l'indication on a :

$$|f(x) - l| \leq |l - l_n| + |f(x) - f_n(x)| + |l_n - f(x)|.$$

Pour tout  $x \in [0, +\infty[$   $|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in [0, +\infty[} |f(x) - f_n(x)| = \|f - f_n\|_\infty$

ce qui montre 2b).

2c) on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ ,  
donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |l_n - l| + \|f_n - f\|_\infty = 0$ . Pour  $\varepsilon > 0$

on peut trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $p \geq N$   $|l_p - l| + \|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon$ .

En prenant  $n = N$  on a bien  $|l_n - l| + \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon$ .

2d) On fixe  $\varepsilon > 0$ , on choisit  $n \in \mathbb{N}$  comme en 2c). On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |l_n - f_n(x)| = 0$   
donc il existe  $R > 0$  tel que si  $x \geq R$   $|l_n - f_n(x)| \leq \varepsilon$ . En utilisant  
2b) on obtient que si  $x \geq R$  alors  $|l - f(x)| \leq 3\varepsilon$ , à l'aide de 2c).

3) 2d) signifie exactement (en remplaçant  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/3$ ) que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \text{ donc que } f \in F.$$

En revenant à l'espace  $E$ , cela veut dire que pour toute suite  $(f_n)$  dans  $F$   
telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ , on a que  $f \in F$ . Ceci signifie  
que  $F$  est un fermé de  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .