
Partiel MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.
téléphones éteints et rangés dans les sacs.
ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD
de manière lisible sur chaque copie.
Numéroter chaque copie.

Le 9 Mars 2022.

Exercice 1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on pose $\tilde{d}(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. On note par $d(x, y) = |x - y|$ la distance usuelle sur \mathbb{R} .

- 1) Montrer que \tilde{d} est une distance sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour d si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour \tilde{d} .
- 3) Trouver une suite de Cauchy pour \tilde{d} qui ne converge pas dans (\mathbb{R}, \tilde{d}) .
- 4) Montrer que \mathbb{R} est fermé et borné pour \tilde{d} , mais que \mathbb{R} n'est pas compact pour \tilde{d} .
Indication : pour le deuxième point, utiliser la question 3).

Exercice 2. Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques.

On rappelle que $f : E_1 \rightarrow E_2$ est continue si et seulement si pour toute suite (x_n) dans E_1 telle que $\lim x_n = x$ dans (E_1, d_1) on a $\lim f(x_n) = f(x)$ dans (E_2, d_2) .

- 1) Montrer que si $f : E_1 \rightarrow E_2$ est continue et $A \subset E_1$ alors $f(\text{Adh}(A)) \subset \text{Adh}(f(A))$.
Indication : utiliser la caractérisation de la continuité et de l'adhérence à l'aide de suites.
- 2) On suppose que $f : E_1 \rightarrow E_2$ n'est pas continue au point $x \in E_1$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim x_n = x$ et $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$.
 - 2a) Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, et un réel $\epsilon_0 > 0$ tels que $d_2(f(x_{\varphi(n)}), f(x)) \geq \epsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - 2b) Soit $A = \{x_{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de tous les termes de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $f(\text{Adh}(A))$ n'est pas inclus dans $\text{Adh}(f(A))$.

Exercice 3. On munit le plan \mathbb{R}^2 de la distance usuelle. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(t, 0) : t \in [0, 1]\}$.

- 1) Déterminer $\text{Int}(D)$ et $\text{Adh}(D)$.
- 2) Est-ce que D est inclus dans $\text{Int}(\text{Adh}(D))$?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}.$$

- 1) Montrer que l'un des deux ensembles A et $\text{Int}(B)$ est inclus dans l'autre, quelle que soit la fonction f .
- 2) Donner un exemple de fonction f pour laquelle l'autre inclusion est fausse.