
Examen de rattrapage MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

Numéroter chaque copie.

Le 22 Juin 2023.

Exercice 1. On munit l'espace $C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 à valeurs réelles des normes :

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [-1, 1]} |f'(x)|.$$

1a) Montrer que l'application $T : C^1([-1, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Tf = f'(0)$ est linéaire et continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.

1b) Est-elle continue pour la norme $\|\cdot\|_0$? (justifiez votre réponse).

Indication : pour montrer que T est continue, trouver une constante $C \geq 0$ telle que $|Tf| \leq C\|f\|_0$ pour tout $f \in C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$. Pour montrer que T n'est pas continue, trouver une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions dans $C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$ telle que $(\|f_n\|_0)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée mais $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite bornée.

Exercice 2. On se place dans \mathbb{R}^2 muni de la distance usuelle.

Déterminer la frontière ∂A des ensembles suivants :

1) $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$

2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1, |y| < 1\}.$

Exercice 3. Soit A, B deux parties de \mathbb{R}^2 , muni de sa distance usuelle. On pose

$$A + B = \{X + Y : X \in A, Y \in B\}.$$

1) Montrer que si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert.

2) Soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}, \quad B = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Montrer que A et B sont fermés.

3) Montrer que $A + B$ n'est pas fermé.

Indication : commencer par dessiner A, B puis $A + B$.

Exercice 4. On munit \mathbb{R}^d de sa norme euclidienne canonique. On note \mathbb{I} l'application identité sur \mathbb{R}^d . Soit $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application linéaire telle que

$$(1) \|Tu\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

1) Soit $u \in \text{Ker}(T - \mathbb{I}) \cap \text{Im}(T - \mathbb{I})$, c'est à dire tel que

$$(2) u = v - Tv \text{ pour un } v \in \mathbb{R}^d \text{ et } Tu = u.$$

1a) En utilisant (2) exprimer $T^k v$ en fonction de u et v .

1b) En utilisant (1) montrer que $u = 0$.

1c) En déduire que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$ il existe $v, w \in \mathbb{R}^d$ *uniques* tels que

$$u = w + Tv, \quad w \in \text{Ker}(T - \mathbb{I}), \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

Indication : utiliser que si A est une application linéaire sur \mathbb{R}^d alors $\dim \text{Ker} A + \dim \text{Im} A = d$ et raisonner en utilisant la notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

2) Pour $u \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$P_n u = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^k u.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n u$.

Indication : utiliser 1c).