
Partiel MDD251

Durée 2h. Documents interdits et calculatrices inutiles.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

ECRIRE LISIBLEMENT SON NOM

sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

Le 22 Février 2023.

Exercice 1. 1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en d'autres termes (x_n) est une suite formée de nombres entiers). Montrer que si (x_n) converge alors elle est constante à partir d'un certain rang.

2) On munit \mathbb{R}^2 de sa distance usuelle. On considère la partie $A \subset \mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}, p \geq 1} \left[-1 + \frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right] \times \{p\}.$$

2a) Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A qui converge vers un point $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

2b) En étudiant ensuite la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ montrer que $(l_1, l_2) \in A$ et en déduire que A est un fermé.

3) Déterminer l'image de A par l'application $p : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $p(A)$ est-il un fermé de \mathbb{R} ?

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (E, d) qui converge vers une limite $l \in E$. On suppose que la suite (x_n) n'est pas une suite constante. On pose

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E.$$

1) Donner un exemple d'une suite d'éléments de A qui n'est pas une sous-suite de la suite (x_n) .

2) On se propose de montrer que $A \cup \{l\}$ est compact dans E .

2a) Soit $U_i, i \in I$ un recouvrement ouvert de $A \cup \{l\}$. Soit U_{i_0} un ouvert de ce recouvrement qui contient le point l . En utilisant que U_{i_0} est ouvert et que $\lim x_n = l$ montrer qu'il existe N_0 assez grand tel que tous les termes de la suite (x_n) pour $n \geq N_0$ appartiennent à U_{i_0} .

2b) Montrer qu'il existe un nombre fini U_{i_1}, \dots, U_{i_N} d'ouverts du recouvrement tel que $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$ est un recouvrement fini de $A \cup \{l\}$.

Exercice 3. Soit $E = C([0, 1])$, l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

On rappelle la propriété suivante sur les intégrales de fonctions continues : si $r \in C([0, 1])$ est une fonction continue telle que

$$\int_0^1 r(x) dx = 0 \text{ et } r(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$

alors $r(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

On pose :

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C([0, 1]).$$

1) Montrer que d_1, d_∞ sont des distances sur E .

2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x^n$ et f la fonction nulle définie par $f(x) = 0$.

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour d_1 mais pas pour d_∞ .

Indication : calculer $d_1(f_n, f)$ et $d_\infty(f_n, f)$.

Exercice 4. Soit K_1 et K_2 deux parties compactes d'un espace métrique (E, d) . Montrer que

$K_1 \cup K_2$ est compact.

Indication : considérer un recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$.