

### Exercice 1

1) on a  $\check{d}(x,y) = \check{d}(y,x)$ .  $\check{d}(x,y) = 0$  ssi  $\arctan x = \arctan y$  et donc  $x=y$  en appliquant la fonction  $\tan$  aux deux membres. Enfin  $\check{d}(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \leq |\arctan x - \arctan z| + |\arctan z - \arctan y| = \check{d}(x,z) + \check{d}(z,y)$ , donc  $\check{d}$  est bien une distance sur  $\mathbb{R}$ .

2) si  $(x_n)$  converge vers  $x$  pour  $d$  on a  $\lim \arctan x_n = \arctan x$  comme la fonction  $\arctan$  est continue et donc  $\check{d}(x_n, x) \rightarrow 0$ ,  $(x_n)$  converge vers  $x$  pour  $\check{d}$ .

Inversement si  $(x_n)$  converge vers  $x$  pour  $\check{d}$  on a  $\lim \arctan x_n = \arctan x$  donc  $\lim x_n = x$  en appliquant la fonction  $\tan$  (qui est continue) aux deux membres pour  $d$ .

3) posons  $x_n = n$ . On a  $\check{d}(x_n, x_p) = |\arctan(n) - \arctan(p)|$ .

Comme  $\lim x_n = +\infty$  on a  $\lim \arctan(n) = \pi/2$ .

la suite  $y_n = \arctan(n)$  est convergente pour  $d$ , donc de Cauchy pour  $\check{d}$ .

Ceci veut dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$|y_n - y_p| (= |\arctan(n) - \arctan(p)| = \check{d}(x_n, x_p)) < \varepsilon \text{ si } n, p \geq N.$$

la suite  $(x_n)$  est donc de Cauchy pour  $\check{d}$ . Si elle convergerait vers  $x$  pour  $\check{d}$ , elle convergerait aussi vers  $x$  pour  $d$ , d'après la question 2).

C'est impossible car  $\lim x_n = +\infty$ .

4)  $\mathbb{R}$  est fermé pour  $\check{d}$  (tout espace métrique est fermé par définition).

De plus comme  $|\arctan x| < \pi/2$  on a

$$\check{d}(x, \emptyset) \leq |\arctan x| < \pi/2 \text{ donc } \mathbb{R} \subset B_d(0, \pi/2), \mathbb{R} \text{ est borné pour } \check{d}.$$

Si  $\mathbb{R}$  était compact pour  $\check{d}$ ,  $\mathbb{R}$  serait complet pour  $\check{d}$  (on a vu en cours que tout ensemble compact est complet). Or d'après la question 3)  $(\mathbb{R}, \check{d})$  n'est pas complet.

Exercice 2

1) soit  $y \in f(\text{Adh}(A))$  c'est à dire que  $y = f(x)$  pour  $x \in \text{Adh}(A)$ .

Comme  $x \in \text{Adh}(A)$ , il existe une suite  $(x_n)$  avec  $x_n \in A$ ,  $\lim x_n = x$ .

Comme  $f$  est continue on a  $\lim f(x_n) = f(x) = y$ . La suite  $y_n = f(x_n)$  appartient à  $f(A)$ , et converge vers  $y$  donc  $y \in \text{Adh}(f(A))$ . On a donc bien  $f(\text{Adh}(A)) \subset \text{Adh}(f(A))$ .

2a) la propriété  $\lim f(x_n) = f(x)$  s'écrit avec des quantificateurs comme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tq } \forall n \geq N \quad d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon.$$

la négation de cette propriété est:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \quad \exists n \geq N \text{ tel que } d_2(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon.$$

Notons par  $\varepsilon_0$  le  $\varepsilon$  dont l'existence est affirmée ci dessus, et  $n(N)$  l'indice  $n \geq N$ . Construisons maintenant la sous suite  $x_{\varphi(n)}$ .

On prend  $\varphi(1) = n(1)$ ,  $\varphi(2) = n(\varphi(1))$ , ...  $\varphi(p) = n(\varphi(p-1))$  etc

comme  $n(N) > N$  on a  $\varphi(p) > \varphi(p-1) \forall p$  donc  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

est strictement croissante. la suite  $y_n = x_{\varphi(n)}$  est bien une sous suite de  $(x_n)$

et on a bien  $d_2(f(x_{\varphi(n)}), f(x)) \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

2b) Comme  $\lim x_n = x$  on a aussi  $\lim x_{\varphi(n)} = x$  donc  $x \in \text{Adh}(A)$

comme  $A = \{x_{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ . D'autre part  $d_2(f(x_{\varphi(n)}), f(x)) \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$

et donc  $d_2(f(A), f(x)) \geq \varepsilon_0$ . Ceci montre que  $f(x)$  n'appartient pas à

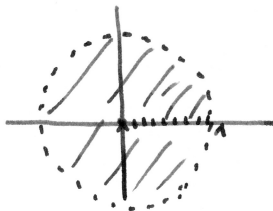
$\text{Adh}(f(A))$ : en effet  $y \in \text{Adh}(B)$  si et seulement si  $d_2(B, y) = 0$ .

Donc  $f(x) \in f(\text{Adh}(A))$  (car  $x \in \text{Adh}(A)$ ) mais  $f(x) \notin \text{Adh}(f(A))$ .

Donc  $f(\text{Adh}(A))$  n'est pas inclus dans  $\text{Adh}(f(A))$ . si

### Exercice 3

1) on commence par définir  $D$ :



on note que  $D = U_1 \setminus U_2$  où  $U_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  est un ouvert et  $U_2 = \{(t, 0) : t \in [0, 1]\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$  est un fermé. Donc  $D = U_1 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus U_2)$  est ouvert comme intersection de deux ouverts.  $D$  étant ouvert on a  $\text{Int}(D) = D$ .

On définit sur le domaine que  $\text{Adh}(D) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Notons  $C$  cet ensemble. C'est fermé et  $D \subset C$  donc  $\text{Adh}(D) \subset C$ .

Pour montrer que  $C \subset \text{Adh}(D)$  il faut pour tout  $(x, y) \in C \setminus D$ , trouver une suite  $(x_n, y_n) \in D$  avec  $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$ . Si  $(x, y) \in C \setminus D$  soit  $x^2 + y^2 = 1$  et  $y \neq 0$ , soit  $(x, y) = (t, 0)$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

Dans le premier cas on prend  $(x_n, y_n) = (1 - \frac{1}{n})(x, y)$ ,  $(x_n, y_n) \in D$  et  $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$ .

Dans le deuxième cas on prend  $(x_n, y_n) = (x, \frac{1}{n})$  si  $x \neq 1$ .  $(x_n, y_n) \in D$  (si  $n$  assez grand, faire le dessin) et  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, 0)$ .

Si  $(x_n, y_n) = (1, 0)$ , on peut prendre  $(x_n, y_n) = (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , on a encore  $(x_n, y_n) \in D$  pour  $n$  assez grand,  $(x_n, y_n) \rightarrow (1, 0)$ .

On a donc bien montré que  $C \subset \text{Adh}(D)$  et donc  $\text{Adh}(D) = C$ .

2)

on a vu que  $D$  est ouvert,  $D \subset \text{Adh}(D)$  donc  $D \subset \text{Int}(\text{Adh}(D))$  car si  $U \subset \mathbb{R}^2$  tout ouvert inclus dans  $U$  est inclus dans  $\text{Int}(U)$ .

### Exercice 4.

1)  $A$  est ouvert car  $A = f^{-1}([0, +\infty[)$  et  $f$  continue. Comme  $A \subset B$  on a aussi  $A \subset \text{Int}(B)$ .

2) Prenons  $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Alors  $B = \mathbb{R}$ ,  $\text{Int}(B) = \mathbb{R}$  et  $A = \emptyset$ ,  $\mathbb{R}$  n'est pas inclus dans  $\emptyset$ .