

Exercice 1

1) supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. On a vu que \mathbb{N} est un fermé de \mathbb{R} ,
comme $x_n \in \mathbb{N}$ pour tout n alors $l \in \mathbb{N}$. (Sinon raisonne par l'absurde
en supposant que $l \notin \mathbb{N}$ et en déduire une contradiction).

si $p, q \in \mathbb{N}$ avec $|p - q| \leq 1/2$ alors $p = q$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ ($l \in \mathbb{N}$),
il existe N tel que si $n \geq N$ $|x_n - l| < 1/2$ (prendre $\varepsilon = 1/2$ dans la
définition de $\lim x_n = l$) comme $x_n \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$ on a donc $x_n = l$
pour $n \geq N$ donc x_n est constante pour n assez grand.

2a) Comme $(x_n, y_n) \in A$ on a $y_n \in \mathbb{N}$ et comme $(x_n, y_n) \rightarrow (l_1, l_2)$ on a
 $y_n \rightarrow l_2$, d'après le 1) (y_n) est constante à partir d'un certain rang.

2b) Soit $p_0 \in \mathbb{N}$ l'entier tel que $y_n = p_0$ pour n assez grand. Comme
 $(x_n, y_n) \in A$ on a $x_n \in [-1 + \frac{1}{p_0}, 1 + \frac{1}{p_0}]$. Cet intervalle est fermé donc
 $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [-1 + \frac{1}{p_0}, 1 + \frac{1}{p_0}]$ et $l_2 = \lim y_n = p_0$ donc
 $(l_1, l_2) \in A$. La suite (x_n, y_n) étant arbitraire, A est fermé.

3) $p([-1 + \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}] \times \{p\}) = [-1 + \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}]$, donc

$$p(A) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}, p \geq 1} [-1 + \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}] =]-1, 1[, \text{ qui n'est pas fermé.}$$

Exercice 2

1) ~~on choisit un point de A par exemple.~~
cette question est incorrecte. (retirer du barième).

2a) U_i est ouvert et $l \in U_i$, donc il existe ε_0 tel que $B(l, \varepsilon_0) \subset U_i$.
Comme $\lim x_n = l$ il existe N_0 tel que $\forall n \geq N_0$ $x_n \in B(l, \varepsilon_0)$ donc
 $x_n \in U_i$.

2b) Chaque x_n pour $n < N_0$ appartient à un des U_i , notons le $U_{i(n)}$.

on a $x_n \in U_i(n)$ pour $n \leq N_0$ et $x_n, p \in U_{i_0}$ pour $n \geq N_0$

(2)

donc $U_{i_0}, U_{i(1)}, U_{i(2)} \dots U_{i(N_0)}$ est un ~~se~~ recouvrement fini de $A \cup \{p\}$,
qui est donc compact.

Exercice 3

1) on a $d_1(f, g) = d_1(g, f)$, $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$.

$$\text{on a } |f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{dnc : } d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$$

$$\text{et on } d_1(f, h) = \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx \\ = d_1(f, g) + d_1(g, h).$$

Si $d_\infty(f, g) = 0$ alors $f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$ donc $f = g$.

Si $d_1(f, g) = 0$ comme $r(x) = |f(x) - g(x)|$ est une fonction positive, continue
avec $\int_0^1 r(x) dx = 0$ on a $r(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ donc $f = g$.

$$2) \text{ on a } d_1(f, f_n) = \int_0^1 |x^n| dx = \int_0^1 x^n dx = 1/n,$$

$$d_\infty(f, f_n) = \sup_{x \in [0, 1]} |0 - x^n| = 1.$$

Exercice 4. Soit $\bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$.

c'est aussi un recouvrement ouvert de K_1 et de K_2 (car $K_i \subset K_1 \cup K_2$)

Il existe donc des ensembles finis $J_1, J_2 \subset I$ tels que

$$K_1 \subset \bigcup_{i \in J_1} U_i, \quad K_2 \subset \bigcup_{i \in J_2} U_i, \quad \text{et donc } K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i \in J_1 \cup J_2} U_i$$

($J_1 \cup J_2$ est fini), $K_1 \cup K_2$ est donc compact si K_1 et K_2 le sont.