

Exercice 1

1) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y + 6x$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) Pour trouver les points critiques de f on résout le système

$$\begin{cases} 6x^2 + 6y = 0 \\ 6y + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = -x. \end{cases}$$

On obtient les points critiques $(0,0)$ et $(1,-1)$.

On a $\det Hf(0,0) = -36$, $Hf(0,0)$ a donc 2 valeurs propres non nulles de signe contraire, $(0,0)$ est un point selle.

On a $\det Hf(1,-1) = 36$, $\text{tr} Hf(1,-1) = 18$, $Hf(1,-1)$ a donc 2 valeurs propres strictement positives, $(1,-1)$ est un minimum local.

Question bonus: on a $f(n,0) = 2n^3$ $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(n,0) = \pm\infty$, donc f n'est ni minime ni maximale sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2.

1) Supposons que E n'est pas dense dans \mathbb{R} c'est à dire que $\text{Adh}(E) \neq \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \text{Adh}(E)$ est non vide et ouvert car $\text{Adh}(E)$ est fermé.

Fixons $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \text{Adh}(E)$. Comme $\mathbb{R} \setminus \text{Adh}(E)$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$]a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon[$ est inclus dans $\mathbb{R} \setminus \text{Adh}(E)$, et donc dans $\mathbb{R} \setminus E$ car $E \subset \text{Adh}(E)$

donc $\mathbb{R} \setminus \text{Adh}(E) \subset \mathbb{R} \setminus E$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse $f^{-1}(\{0\})$ est dense dans \mathbb{R} .

Il existe donc une suite (x_n) dans $f^{-1}(\{0\})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

f est continue donc $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Comme $x_n \in f^{-1}(\{0\})$ on a

$f(x_n) = 0$ et donc $f(a) = 0$.

4) on a: $|\varphi(x)(f(x)+g(x))| \leq |\varphi(x)f(x)| + |\varphi(x)g(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$. De même

$|\varphi(x)\lambda f(x)| = |\lambda| |\varphi(x)f(x)|$ donc $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

5) Soit f telle que $f(x)\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. On a donc $f(x) = 0$ si $\varphi(x) \neq 0$.

et donc f s'annule sur l'ensemble $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$.

Comme cet ensemble est dense dans \mathbb{R} , f est identiquement nulle d'après la question 2). Si $N(f) = 0$ on a $f(x)\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f = 0$, N est donc une norme.

6). Si $E = \varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ n'est pas dense dans \mathbb{R} , son complémentaire

$\mathbb{R} \setminus E = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 0\}$ contient un intervalle ouvert $]a, b[$.

Soit f une fonction continue nulle pour $x \notin]a, b[$.

Par exemple on peut prendre:
$$f(x) = \begin{cases} (x-a)(x-b), & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b. \end{cases}$$



On a $\varphi(x) = 0$ si $x \in]a, b[$ et $f(x) = 0$ si $x \notin]a, b[$ donc

$\varphi(x)f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. On a donc $N(f) = 0$ mais $f \neq 0$, N n'est pas une norme.

Exercices.

1) on a $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ et $\|A\| < 1$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \|A^n\|$ converge, car on tiene général et majoré par celui d'une série géométrique de raison < 1 .

Dans un ev.n. complet toute série normalement convergente est convergente.

2) On a $(\mathbb{1} - A)S_N = (\mathbb{1} - A) \sum_{n=0}^N A^n = \mathbb{1} - A^{N+1},$

et $\|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ donc $\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbb{1} - A)S_N = \mathbb{1}.$

On a vu dans la question 1) que $\lim S_N = \lim \sum_{n=0}^N A^n$ existe,
(on note $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$). Soit $R = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$:

On a $(I - A)R = \lim_{N \rightarrow \infty} (I - A)S_N = I$. Comme $(I - A)S_N = S_N(I - A)$

on a aussi $R(I - A) = I$. La matrice $I - A$ est donc inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

3) on a $B_0 - B = B_0(I - B_0^{-1}B)$. Soit $A = B_0^{-1}B$. On a

$$\|A\| \leq \|B_0^{-1}\| \|B\| < 1, \text{ donc } I - B_0^{-1}B \text{ est inversible par la question 2).}$$

Le produit de 2 matrices inversibles est inversible donc $B_0 - B$ est inversible.

4) Soit $B_0 \in GL_n(\mathbb{R})$. on a vu dans la question 3) que si

$$\|B\| \leq \frac{1}{\|B_0^{-1}\|}, \quad B_0 - B \text{ est inversible. Ceci veut dire que la}$$

boule $B(B_0, \varepsilon)$ $\varepsilon = \frac{1}{\|B_0^{-1}\|}$ est entièrement incluse dans $GL_n(\mathbb{R})$.

$GL_n(\mathbb{R})$ est donc bien un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

5). Soit $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ le polynôme caractéristique de A .

L'ensemble des racines de P (réelles) est fini. Il existe donc une

suite $\lambda_n \in \mathbb{R}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ et $P(\lambda_n) \neq 0 \forall n$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc λ_n avec $|\lambda_n| < \varepsilon$ et $P(\lambda_n) \neq 0$, c'est à dire $\det(A - \lambda_n I) \neq 0$ et donc $A - \lambda_n I$ inversible.

Soit $A_n = A - \lambda_n I$ on a $\|A - A_n\| = |\lambda_n| \|I\| = |\lambda_n| \rightarrow 0$ donc

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Comme $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $GL_n(\mathbb{R})$ est

dense dans $M_n(\mathbb{R})$.