
Examen MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

IL EST INTERDIT D' ECRIRE AU CRAYON OU A L' ENCRE ROUGE

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

Le 16 Mai 2023.

Exercice 1. Une suite réelle sera notée $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, le n -ième terme de la suite étant noté $u(n)$. Soit E l' espace des suites réelles bornées telles que $u(0) = 0$.

1) Montrer que

$$N_1(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n)|, \quad N_2(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n+1) - u(n)|.$$

définissent des normes sur E .

2) Montrer que

$$N_2(u) \leq 2N_1(u), \quad \forall u \in E.$$

Trouver une suite $u \in E$ différente de la suite nulle telle que $N_2(u) = 2N_1(u)$.

3) On considère pour $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$, l' élément u_p de E défini par

$$u_p(n) = \begin{cases} \frac{n}{p} & \text{pour } 0 \leq n \leq p, \\ 1 & \text{pour } n > p. \end{cases}$$

3a) Calculer $N_1(u_p)$ et $N_2(u_p)$.

3b) Les normes N_1 et N_2 sont elles équivalentes? Justifier votre réponse.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^3 - 6xy.$$

1) Calculer les dérivées partielles de f et sa matrice hessienne.

2) Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

3) f est elle minorée, resp. majorée sur \mathbb{R}^2 . Justifier votre réponse.

Exercice 3. Soit E l' espace vectoriel $E = \{f \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$, formé des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ qui s' annulent en 0. On pose

$$N_1(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|, \quad N_2(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + f'(x)|.$$

1) Montrer que si $f \in E$ et $N_1(f) = 0$ resp. $N_2(f) = 0$ alors $f = 0$.

Indication : pour N_2 on pourra utiliser le fait que $(f(x)e^x)' = (f(x) + f'(x))e^x$.

En déduire que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

Dans la suite de l' exercice, on va montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

2) Montrer que si $f \in E$ alors

$$|f(x)| \leq N_1(f), \quad \forall x \in [0, 1],$$

et en déduire que

$$N_2(f) \leq 2N_1(f), \quad \forall f \in E.$$

3) Vérifier que pour tout $f \in E$ on a

$$e^x f(x) = \int_0^x (f(t) + f'(t))e^t dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Indication : dériver les deux membres de l'identité.

4) En utilisant que $e^t \leq e^x$ pour $t \in [0, x]$ en déduire que

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f(t) + f'(t)| dt,$$

puis que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \leq N_2(f), \quad \forall x \in [0, 1],$$

puis que

$$N_1(f) \leq 2N_2(f), \quad \forall f \in E.$$

Indication : majorer $|f'(x)|$ en fonction de $|f(x) + f'(x)|$ et de $|f(x)|$.

Exercice 4. On se place dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{C} . On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme uniforme associée à la norme hilbertienne sur \mathbb{C}^n :

$$\|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \|A\| = \sup_{\|z\|_2 \leq 1} \|Az\|_2, \quad A \in M_n(\mathbb{C}).$$

1a) Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = \|A\|$.

1b) Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = AB$.

Indication : exprimer $A_n B_n - AB$ à l'aide de $A_n - A$ et $B_n - B$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = C$ existe. Montrer que C est la matrice d'une projection c'est à dire que $C^2 = C$.