

Exercice 1

1) on a pour $\vec{v}=(v_1, v_2)$ $f(t\vec{v}) = \begin{cases} t v_2^2 / v_1 & \text{si } v_1 \neq 0 \text{ et } t v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{si } t v_1 = 0. \end{cases}$

et $f(0\vec{v}) = f(0,0) = 0$. Si $v_1 \neq 0$ on a $f(t\vec{v}) = \begin{cases} t v_2^2 / v_1 & \text{pour } t \neq 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$

donc $t \mapsto f(t\vec{v})$ est dérivable en $t=0$ de dérivée v_2^2 / v_1 .

Si $v_1 = 0$ $f(t\vec{v}) = 0 \forall t$, donc est dérivable en $t=0$ de dérivée 0.

f est donc bien dérivable dans toutes les directions au point $(0,0)$.

2) On choisit $u_n = (0,0)$ $f(u_n) = 0 \forall n$, et $v_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ $f(v_n) = 1$ comme $\lim u_n = (0,0)$, $\lim v_n = (0,0)$ f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$ donc les points critiques de f sont donnés par $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y^4 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = 0 \text{ ou } y = 1 \end{cases}$

l'équation en y donne $y=0$ (donc $x=0$) ou $y=1$ ($y^3=1$) donc $x=1$.

On a les points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 3

1) pour $y \in A$ on a $d(x,y) \leq d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},y) \Rightarrow d(x,A) \leq d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},y)$
car $d(x,A) \leq d(x,y)$.

2a) $d(x,A) - d(x,\tilde{x}) \leq d(\tilde{x},y) \forall \tilde{x}, y \in A$ donc comme $d(\tilde{x},A) = \inf_{y \in A} d(\tilde{x},y)$
on a $d(x,A) \leq d(x,\tilde{x}) + d(\tilde{x},A)$.

Donc $d(x,A) - d(\tilde{x},A) \leq d(x,\tilde{x})$. En échangeant x et \tilde{x} , on a aussi

$d(\tilde{x},A) - d(x,A) \leq d(x,\tilde{x})$, donc $|d(x,A) - d(\tilde{x},A)| \leq d(x,\tilde{x})$.

2b) On en déduit que $E \ni x \mapsto d(x,A)$ est continue (et en fait lipschitzienne).

3a). Comme U est ouvert et $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset U$,
c'est à dire $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow y \in U$. On a donc si $y \notin U$ alors
 $d(x,y) \geq \varepsilon$. Donc $d(x, E \setminus U) = \inf_{y \notin U} d(x,y) \geq \varepsilon > 0$.

3b). $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = d(x, E \setminus U)$ est continue (cf 2b).

Toute fct continue sur un compact $K \subset E$, à valeurs dans \mathbb{R} est bornée et

atteint ses bornes. Donc $\inf_{x \in K} d(x, E \setminus U) = d(x_0, E \setminus U)$ pour au moins un $x_0 \in K$. On a donc $d(x_0, E \setminus U) > 0$ car $x_0 \in K \subset U$ donc $x_0 \in U$ (cf 3a). C2.

3c) Soit $\alpha > 0$ donné en point 3b). Montrons que $\forall x \in K, B(x, \alpha/2) \subset U$.

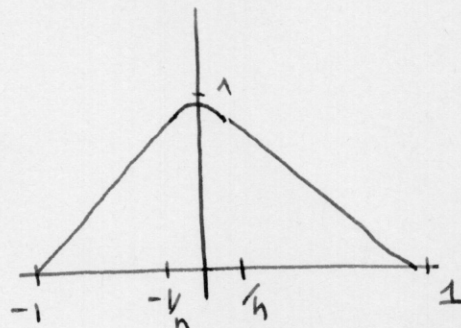
si $x' \in B(x, \alpha/2)$ on a $d(x, x') < \alpha/2$ et $d(x, E \setminus U) > \alpha$ donc comme

$$d(x', E \setminus U) \geq d(x, E \setminus U) - d(x, x') \quad (\text{cf 2a}) \text{ en remplaçant } A \text{ par } E \setminus U$$

on a $d(x', E \setminus U) \geq \alpha/2$ donc $x' \notin E \setminus U$ donc $x' \in U$. On a donc montré que $B(x, \alpha/2) \subset U, \forall x \in U$.

Exercice 4

1) on dessine le graphe de f_n



1a) f_n est de classe C^1 sur $[-1, -1/n[$, sur $] -1/n, 1/n[$ et sur $] \frac{1}{n}, 1]$. Aux points $-1/n$ et $\frac{1}{n}$ il faut vérifier que les dérivées à gauche et à droite sont égales.

$$f'_g(-1/n) = 1, f'_d(-1/n) = -n \times (-1/n) = 1, f'_g(1/n) = -n \times \frac{1}{n} = -1, f'_d(1/n) = 1,$$

donc f_n est bien de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

1b) soit $x \in [-1, 0[$. Alors pour n assez grand on a $-1 \leq x \leq -1/n$ donc $f_n(x) = 1+x$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1+x$. On raisonne de même pour $x \in]0, 1]$, on obtient

que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1-x$. Il reste à regarder le cas $x=0$. On a

$$f_n(0) = 1 - \frac{1}{2n} \text{ car } -1/n < 0 < 1/n \forall n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1.$$

On a donc

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

1c) On regarde $\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x) - f_n(x)|$

On a $f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq -1/n \\ -\frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2 - x & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ -\frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2 + x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

C.3.

pour $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} + \frac{n}{2}x^2 + |x| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$.

Donc $\sup_{[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n}$ et donc $\lim f_n = f$ dans $C([-1,1])$.

1d) On a construit une suite (f_n) appartenant à $C^1([-1,1])$ qui converge dans $C([-1,1])$ vers la fonction f qui n'est pas dans $C^1([-1,1])$ (pas dérivable en 0).
Donc $C^1([-1,1])$ n'est pas fermé dans $C([-1,1])$.
