

Exercice 1.

du 6/3/2024

1) Montrons que si  $X_n = (x_n, y_n)$  et la suite  $(X_n)$  converge vers  $X = (x, y)$  pour  $D$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  pour  $d$ .

On a  $D(X_n, X) = d(x_n, x) + d(y_n, y)$  donc si  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_n, X) = 0$ , on a bien  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y) = 0$ .

Soit maintenant  $(X_n)$  une suite dans  $\Gamma_f$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  pour  $D$ .

on a  $X_n = (x_n, f(x_n))$  car  $X_n \in \Gamma_f$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ .

Comme  $f$  est continue on a  $y = f(x)$  donc  $X \in \Gamma_f$ .

L'ensemble  $\Gamma_f$  est donc bien fermé.

Exercice 2

1)  $f$  est continue donc atteint ses bornes sur  $[0, 1]$ , donc  $\alpha = \inf_{x \in [0, 1]} f(x)$  est égal à  $f(x_0)$  pour  $x_0 \in [0, 1]$ , donc  $\alpha > 0$ .

2) Soit  $\alpha = \inf_{x \in [0, 1]} f(x)$ . Prenons  $\varepsilon = \alpha/2$  (tout  $0 < \varepsilon < \alpha$  marche aussi).

supposons que  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ . On a pour  $x \in [0, 1]$

$$g(x) = f(x) + g(x) - f(x) > f(x) - \varepsilon > \alpha - \alpha/2 = \alpha/2 > 0.$$

3) L'ensemble  $U$  est ouvert: on a vu que si  $f \in U$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$  alors  $g \in U$ . Traduit en termes de

distance, cela signifie que si  $f \in U$ ,  $B(f, \varepsilon) \subset U$ , donc  $U$  est un ouvert de  $(E, d)$ .

Exercice 3

1) Montrons que  $\text{Int}(U) = \emptyset$ .  $\emptyset$  est ouvert et inclus dans  $U$ , donc  $\emptyset \subset \text{Int}(U)$

Pour montrer que  $\text{Int}(U) \subset \emptyset$  on considère un  $x \in U$   $x \neq \emptyset$  (donc simplement  $x \in U$ ). On a donc  $x = \frac{1}{n}$ . Le point de  $U$  le plus proche

de  $1/n$  est  $\frac{1}{n+1}$ , et  $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| = \frac{1}{n(n+1)}$ .

si  $0 < \varepsilon < \frac{1}{n(n+1)}$  alors  $B(x, \varepsilon) = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  n'est pas inclus dans  $U$ . On en déduit que  $x \notin \text{Int}(U)$  donc  $\text{Int}(U)$  est bien égal à  $\emptyset$ .

Montrons que  $\text{Adh}(U) = \{0\} \cup U$ .

On montre d'abord que  $\{0\} \cup U$  est fermé et contient  $U$ .

Evidemment  $\{0\} \cup U$  contient  $U$ .

Pour montrer que  $\{0\} \cup U$  est fermé on regarde son complémentaire  $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup U)$ , qui est égal à  $] -\infty, 0[ \cup \bigcup_{n \geq 1} ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[ \cup ]1, +\infty[$ .

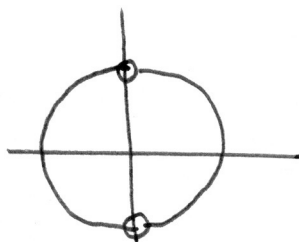
C'est une union d'intervalles ouverts, donc une union d'ouverts donc c'est un ouvert. On en déduit que  $\{0\} \cup U$  est un fermé qui contient  $U$ , donc  $\text{Adh}(U) \subset \{0\} \cup U$ .

On montre que  $\{0\} \cup U \subset \text{Adh}(U)$ , pour cela il suffit de montrer que  $0 \in \text{Adh}(U)$  (car  $U \subset \text{Adh}(U)$ ).

On a  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n$ , donc  $0$  est la limite d'une suite d'éléments de  $U$ , donc  $0 \in \text{Adh}(U)$ .

On a bien montré que  $\text{Adh}(U) = \{0\} \cup U$ .

2) On définit  $U$ :



on définit que  $\text{Int}(U) = \emptyset$  et  $\text{Adh}(U) = \mathbb{C}$  la cercle unité.

Montrons que  $\text{Int}(U) = \emptyset$ . Soit  $x = (x, y) \in U$ , donc  $x^2 + y^2 = 1$  et  $x \neq 0$ .

le point  $x_\varepsilon = ((1-\varepsilon)x, (1-\varepsilon)y)$  n'appartient pas à  $U$  (car  $(1-\varepsilon)^2 x^2 + (1-\varepsilon)^2 y^2 \neq 1$ )

et  $d(x, x_\varepsilon) = \varepsilon$ . Donc  $x_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$  mais  $x_\varepsilon \notin U$ .

En remplaçant  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/2$ , on a montré que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $B(x, \varepsilon)$  n'est pas entièrement incluse dans  $U$ , donc  $x \notin \text{Int}(U)$ .

Donc  $\text{Int}(U)$  est bien vide.

Montrons que  $\text{Adh}(U) = C$ .  $C$  contient  $U$  et  $C$  est

fermé : en effet  $C$  est l'image inverse du fermé  $\{1\}$  dans  $\mathbb{R}$   
par l'application continue  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ .

On a donc  $\text{Adh}(U) \subset C$ .

Montrons que  $C \subset \text{Adh}(U)$ . Il suffit que considère les  
2 points  $(0,1)$  et  $(0,-1)$  qui sont dans  $C$  mais pas dans  $U$ .

Prendons  $X_n = \sin(\pi/2 - 1/n), \cos(\pi/2 - 1/n)$   $n \geq 1$ .  
 $X_n \in U$  et  $d((0,1), X_n) = \sqrt{\cos^2(\pi/2 - 1/n) + (1 - \sin(\pi/2 - 1/n))^2}$   
donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} d((0,1), X_n) = 0$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = (0,1)$ .

Donc  $(0,1)$  est la limite d'une suite d'éléments de  $U$  et  
donc  $(0,1) \in \text{Adh}(U)$ . Le même raisonnement montre que  
 $(0,-1) \in \text{Adh}(U)$  (remplacer  $\pi/2$  par  $-\pi/2$ ).

#### Exercice 4

1) on a  $d(x,y) = d(y,x)$ ,  $d(x,y) \geq 0$   $d(x,y) = 0 \Rightarrow$

$\arctan x = \arctan y \Rightarrow x = y$ , donc  $d$  est une

et  $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \leq |\arctan x - \arctan z| +$

$|\arctan z - \arctan x| = d(x,z) + d(z,y)$ , donc  $d$  est une  
distance.

2) si  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  on a  $|x_n - x| \rightarrow 0$  donc  $\arctan(x_n) \rightarrow \arctan x$

car  $\arctan$  est une fonction continue, donc  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ .

Inversement si  $\arctan x_n \rightarrow \arctan x$  donc  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ,

$x_n \rightarrow x$  car  $\tan$  est une fonction continue, donc  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ .

3)  $\mathbb{R}$  est fermé pour  $d$  ( $E$  est fermé pour  $d$  pour tout espace  
métrique  $d$ )

(4)

$\mathbb{R}$  est borné pour  $d$ : en effet comme  $|\arctan x| < \pi/2 \quad \forall x$   
on a  $d(x, y) \leq |\arctan x| + |\arctan y| < \pi \quad \forall x, y$ ,  
donc  $\mathbb{R} \subset B_f(0, \pi)$ ,  $\mathbb{R}$  est borné pour  $d$ .

4) Prenons  $x_n = n$ . Supposons que  $\mathbb{R}$  soit compact pour  $d$ .  
la suite  $(x_n)$  aurait une sous suite  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge  
vers un  $x \in \mathbb{R}$  pour  $d$ . Par le point 2)  $(x_{\varphi(n)})$  convergerait  
vers  $x$  pour la distance usuelle  $d$ . Mais c'est impossible  
car  $\lim x_n = +\infty$  (pour  $d$ ) donc  $\lim x_{\varphi(n)} = +\infty$ , d'où  
une contradiction. On en déduit que  $\mathbb{R}$ , bien que fermé et  
borné pour  $d$ , n'est pas compact pour  $d$ .