

NOTES DE COURS MATH 252
2024-2025

CHRISTIAN GÉRARD

*Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405
Orsay Cedex, France*

1. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1.1. Introduction. Une variable réelle sera notée par x ou t , une fonction d' une variable réelle par y, f, u etc.

Definition 1.1. Soit I un intervalle, $n \in \mathbb{N}^*$ et $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution sur I de l' équation différentielle

$$(E) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

si la fonction y est n fois dérivable sur I et on a

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

L 'entier n est appelé l' ordre de l' équation différentielle (E) .

Résoudre (E) sur I c'est trouver toutes les solutions y de (E) sur I .

Si y est solution de (E) sur I elle est aussi solution sur tout intervalle $I' \subset I$. On essaie donc de trouver l' intervalle I le plus grand possible sur lequel y est solution. Ceci conduit à la notion de solution maximale.

Definition 1.2. Une solution y de (E) sur I est une solution maximale s' il n' existe pas d' intervalle I_1 contenant strictement I et de solution y_1 de (E) sur I_1 telle que $y_1(x) = y(x)$ pour $x \in I$.

1.1.1. Exemples. les équations

$$\begin{aligned} xy' - y &= 0, \\ y'' + 4y &= \cos x, \\ y'e^y &= 1 \end{aligned}$$

sont des équations différentielles, d' ordre respectif 1, 2 et 1. Par contre les équations :

$$\begin{aligned} y(x) + 2y(y(x)) &= 0, \\ y'(x) &= y(x-1) \end{aligned}$$

ne sont pas des équations différentielles, la première parce que les dérivées de y ne figurent pas dans l' équation, la seconde parce que l' équation relie la valeur de y' au point x avec celle de y au point $x-1$, ce n'est donc pas une équation différentielle.

1.1.2. *Avertissement.* L'immense majorité des équations différentielles ne sont pas résolubles explicitement, c'est à dire que leurs solutions ne s'expriment pas en termes de fonctions connues. Ceci n'a absolument aucune importance. Certaines équations différentielles apparaissent fréquemment en physique ou en mathématiques, comme l'équation de Bessel, ou l'équation hypergéométrique. On donne alors des noms à certaines de leurs solutions (par exemple les fonctions de Bessel), et si nécessaire, on peut en calculer des tables de valeurs approchées, ou étudier leurs limites.

La fonction exponentielle, que tout le monde considère comme une fonction connue, est elle aussi obtenue de cette façon, comme l'unique solution de l'équation différentielle

$$y' = y,$$

telle que $y(0) = 1$.

1.1.3. *Primitives.* L'équation d'ordre 1 la plus simple est :

$$y' = f,$$

dont les solutions sont les primitives de f sur I . On essaie souvent de ramener la résolution d'une équation différentielle à la recherche d'une primitive, un problème annexe, supposé connu. On utilisera la notation $\int f(x)dx$ pour désigner *une primitive* de f , à ne pas confondre avec $\int_a^b f(x)dx$, qui désigne l'intégrale de f sur $[a, b]$, et qui est donc un nombre réel.

Si f est une fonction continue, la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule au point a . Si F est une primitive de f alors

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

On rappelle que deux primitives de f sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Remarquons que là aussi, il est impossible de calculer explicitement la primitive de la plupart des fonctions.

Par exemple $\int e^{-x^2}dx$ ne se calcule pas explicitement en termes de fonctions usuelles, mais, étant fondamentale en probabilités, porte un nom, c'est la fonction $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)$ (fonction d'erreur de Gauss).

1.2. Equations d'ordre 1 à variables séparées.

Definition 1.3. Soit f, g deux fonctions. Une équation différentielle de la forme

$$(E) \quad y'g(y) = f(x),$$

est dite à variables séparées

Pour résoudre une équation différentielle à variables séparées on utilise la notation de Leibniz où y' se note $\frac{dy}{dx}$. Les symboles dy, dx (aussi présents dans l'écriture d'une intégrale), ne sont pas des nombres (Leibniz les appelait des infinitésimaux), mais on peut déduire des résultats corrects si on les manipule comme des nombres. On écrit donc (E) comme

$$\begin{aligned} g(y) \frac{dy}{dx} &= f(x) \\ \Leftrightarrow g(y)dy &= f(x)dx \end{aligned}$$

On 'intègre' le membre de droite en x , celui de gauche en y , on obtient :

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

Si $G(y)$ est une primitive de $g(y)$ et $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ on obtient donc la relation

$$G(y) = F(x) + c,$$

qui définit implicitement y comme une fonction de x . En effet si G^{-1} est la fonction réciproque de G , on obtient la solution générale de (E) comme :

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c), \quad c \in \mathbb{R} \text{ constante réelle arbitraire.}$$

1.2.1. *Exemples.* Soit

$$(E) \quad y' = y^2 x.$$

On écrit (E) comme

$$\frac{dy}{dx} = y^2 x \Leftrightarrow y^{-2} dy = x dx,$$

on a

$$\int y^{-2} dy = -y^{-1}, \quad \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

et donc

$$-y^{-1} = \frac{1}{2} x^2 + c, \Leftrightarrow y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2} x^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On doit discuter, en fonction de la valeur de c les solutions maximales. Ça semble compliqué mais c'est très simple : il suffit de trouver le domaine de définition (en fonction de c) de $y(x)$. Ce domaine est un intervalle ou une union d'intervalles, chacun de ces intervalles donne une solution maximale. Dans notre cas on obtient :

$$\text{si } c > 0 \quad I = \mathbb{R},$$

$$\text{si } c = 0 \quad I =]0, +\infty[\text{ ou } I =]-\infty, 0[$$

$$\text{si } c < 0 \quad I =]-\infty, -\sqrt{-2c}[\text{ ou } I =]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[\text{ ou } I =]\sqrt{-2c}, +\infty[.$$

Soit

$$(E) \quad x^2 y' = e^y.$$

On écrit (E) comme

$$x^2 \frac{dy}{dx} = e^y \Leftrightarrow e^{-y} dy = x^{-2} dx,$$

on a

$$\int e^{-y} dy = -e^{-y}, \quad \int x^{-2} dx = -x^{-1},$$

et donc

$$-e^{-y} = -x^{-1} + c \Rightarrow y(x) = -\ln(x^{-1} - c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

On obtient les solutions maximales (il faut que $x^{-1} - c > 0$) :

$$\text{si } c > 0 \quad I =]c^{-1}, +\infty[$$

$$\text{si } c = 0 \quad I =]0, +\infty[$$

$$\text{si } c < 0 \quad I =]-\infty, c^{-1}[\text{ ou } I =]0, +\infty[.$$

1.3. Equations linéaires d'ordre 1.

Definition 1.4. Soient a, b, c trois fonctions. Une équation différentielle de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1.

1.3.1. *Méthode de résolution.* on commence par diviser l' équation par $a(x)$, on obtient

$$y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{c(x)}{a(x)},$$

que l' on réécrit

$$(E) \quad y' = f(x)y + g(x), \quad f(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}, \quad g(x) = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

1.3.2. *Equation homogène.* On résout d' abord l' équation sans second membre (appelée aussi équation *homogène*) :

$$(H) \quad y' = f(x)y.$$

C'est une équation à variables séparées, on l' écrit comme

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y \Leftrightarrow y^{-1}dy = f(x)dx,$$

ce qui donne

$$\ln y = F(x) + c, \quad F \text{ une primitive de } f,$$

et donc

$$(1.1) \quad y(x) = Ce^{F(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On peut montrer facilement que toutes les solutions de (H) sont données par (1.1), on appelle la fonction définie par 1.1 la *solution générale* de l' équation homogène (H) .

1.3.3. *Solution particulière de (E) .* On cherche maintenant une solution particulière de (E) . Cette solution n'a rien de particulier, c'est juste une solution parmi d' autres. Pour ce faire, on utilise la méthode dite de la *variation de la constante*, en cherchant une solution de (E) sous la forme

$$(1.2) \quad y_0(x) = C(x)e^{F(x)},$$

la fonction $C(x)$ étant à déterminer. La constante C dans (1.1) est devenue variable, d' où le nom de la méthode. On porte la forme (1.2) dans l' équation (E) et on obtient :

$$y_0'(x) = C'(x)e^{F(x)} + C(x)F'(x)e^{F(x)} = f(x)C(x)e^{F(x)} + g(x),$$

soit comme $F' = f$

$$C'(x)e^{F(x)} = g(x) \Leftrightarrow C'(x) = g(x)e^{-F(x)}.$$

On est ramené à chercher une primitive de ge^{-F} . Si on fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ on peut prendre

$$C(x) = \int_{x_0}^x g(t)e^{-F(t)} dt,$$

et donc la solution particulière est :

$$y_0(x) = e^{F(x)} \int_{x_0}^x g(t)e^{-F(t)} dt.$$

1.3.4. *Solution générale de (E) .* La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à la solution particulière trouvée plus haut, la solution générale de (H) . On obtient donc :

$$y(x) = Ce^{F(x)} + e^{F(x)} \int_{x_0}^x g(t)e^{-F(t)} dt.$$

1.3.5. *Exemple.*

$$(E) (x^2 + 1)y' - xy = 3x \Leftrightarrow y' = \frac{x}{x^2 + 1}y + \frac{3x}{x^2 + 1}.$$

On résout d'abord

$$(H) y' = \frac{x}{x^2 + 1}y.$$

On cherche une primitive

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1),$$

la solution générale de (H) est

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} = C\sqrt{x^2 + 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On cherche ensuite une solution particulière de (E) par la variation de la constante $y_0(x) = C(x)\sqrt{x^2 + 1}$, on obtient l'équation pour $C(x)$:

$$C'(x)\sqrt{x^2 + 1} = \frac{3x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{3x}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

On calcule $\int \frac{3x}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx$ par le changement de variables $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$ on obtient $\int 3/2 u^{-3/2} du = -3u^{-1/2}$. On a donc

$$C(x) = -3(x^2 + 1)^{-1/2} y_0(x) = -3.$$

La solution générale de (E) est donc :

$$y(x) = -3 + C\sqrt{x^2 + 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.4. **Equations linéaires d'ordre 2.** Une équation différentielle de la forme

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x),$$

où $a(x), b(x), c(x), d(x)$ sont des fonctions à valeurs réelles est appelée *équation différentielle linéaire d'ordre 2*. En général on ne peut pas résoudre explicitement ces équations, sauf dans certains cas particuliers. Nous allons regarder le cas à *coefficients constants* :

$$(E) ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x),$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

1.4.1. *Solution générale de l'équation homogène.* On résout d'abord l'équation homogène associée :

$$(H) ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Si on cherche des solutions sous la forme $y(x) = e^{\lambda x}$, on voit que λ doit être une solution de l'équation caractéristique :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0;$$

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

est appelé le *polynôme caractéristique* de l'équation (E).

On distingue selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, on a deux racines distinctes réelles λ_1, λ_2 et la solution générale de (H) est :

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Si $\Delta = 0$ on a une racine réelle double λ et la solution générale de (H) est :

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Si $\Delta < 0$ on a deux racines complexes conjuguées $\lambda + i\omega, \lambda - i\omega$ ($\omega > 0$) et la solution générale de (H) est :

$$y(x) = C_1 \cos(\omega x) e^{\lambda x} + C_2 \sin(\omega x) e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Une autre façon d'écrire cette solution est

$$y(x) = \operatorname{Re}(ze^{(\lambda+i\omega)x}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

1.4.2. *Solution particulière de l'équation avec second membre.* Si le second membre $d(x)$ est arbitraire, on ne peut pas écrire de solution particulière sous une forme explicite. Néanmoins c'est possible si le second membre est un 'exponentielle polynôme', c'est à dire de la forme

$$d(x) = e^{\lambda x} (A(x) \cos(\omega x) + B(x) \sin(\omega x)), \quad A(x), B(x) \text{ polynômes de degré } \leq n,$$

et $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$. On a comme cas particuliers $\lambda = 0$ (il n'y a pas d'exponentielle) et $\omega = 0$ (il n'y a pas de cosinus ni de sinus), et bien sûr un des deux polynômes $A(x), B(x)$ peut être nul.

La règle pour chercher une solution particulière est la suivante : on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = x^p e^{\lambda x} (C(x) \cos(\omega x) + D(x) \sin(\omega x)), \quad C(x), D(x) \text{ polynômes de degré } \leq n$$

et la puissance p vaut

- 0 si $\lambda + i\omega$ pas racine de P ,
- 1 si $\lambda + i\omega$ racine simple de P ,
- 2 si $\lambda + i\omega$ racine double de P ,

1.4.3. *Solution générale de l'équation avec second membre.* La solution générale de (E) est alors obtenue comme la somme de la solution particulière de (E) trouvée au dessus et de la solution générale de (H).

1.4.4. *Exemples.* On regarde d'abord des équations homogènes :

$$(H1) \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, de racines 1, 2 la solution générale de (H) est :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

$$(H2) \quad y'' - 2y' + y = 0,$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, de racine double 1 la solution générale de (H) est :

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

$$(H3) \quad y'' - 2y' + 2y = 0,$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, de racines $1 + i, 1 - i$ la solution générale de (H) est :

$$y(x) = C_1 \cos x e^x + C_2 \sin x e^x.$$

On regarde ensuite les équations avec second membre :

$$(E1) \quad y'' - 3y' + 2y = x^2$$

Le second membre est de la forme exponentielle polynôme avec $\lambda = 0, \omega = 0$ donc $\lambda + i\omega = 0$ qui n'est pas racine de $P(\lambda)$. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$

on met cette forme a priori dans l' équation et on obtient par identification les équations :

$$\begin{cases} 2a_0 = 1, \\ 2a_1 - 6a_0 = 0, \\ 2a_2 - 3a_1 + 2a_0 = 0, \end{cases}$$

c'est un système triangulaire, donc la solution est $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 3/2, a_2 = 7/4$, la solution particulière est

$$y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3/2x + 7/4.$$

$$(E2) \quad y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$$

à nouveau on regarde $\lambda + i\omega = -1$, qui n'est pas racine de $P(\lambda)$, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(x) = a_0 e^{-x},$$

(a_0 étant un polynôme de degré 0). On obtient en mettant cette forme dans l' équation $a_0 = 1/6$.

$$(E3) \quad y'' - 3y' + 2y = x e^x,$$

maintenant $\lambda + i\omega = 1$ qui est racine, le polynôme est de degré 1. On cherche une solution particulière de la forme

$$y_0(x) = x e^x (a_0 x + a_1),$$

à nouveau en mettant cette forme dans l' équation on obtient les équations :

$$\begin{cases} 2a_0 - a_1 = 0, \\ -2a_0 = 1 \end{cases}$$

et donc $a_0 = -1/2, a_1 = -1$, la solution particulière est

$$y_0(x) = x e^x \left(-\frac{1}{2}x - 1\right).$$

1.4.5. *Oscillations forcées d' un pendule simple.* L' équation du mouvement d' un pendule simple est

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

ω étant la fréquence d' oscillation du pendule, qui s' exprime en fonction de sa masse et de sa longueur ($y(t)$ est souvent noté $\theta(t)$). Si on soumet le pendule à une force extérieure (oscillations forcées), on obtient l' équation :

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos(\tilde{\omega}t).$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ de racines $\pm i\omega$.

Si $\tilde{\omega} \neq \omega$ la solution particulière est

$$y_0(t) = \frac{1}{\omega^2 - \tilde{\omega}^2} \cos(\tilde{\omega}t),$$

la solution générale est :

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \tilde{\omega}^2} \cos(\tilde{\omega}t),$$

les deux oscillations se superposent simplement, rien ne se passe.

Si $\tilde{\omega} = \omega$ on doit chercher une solution particulière sous la forme

$$t(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

et en mettant cette forme dans l' équation on obtient $\beta = 0, \alpha = -(2\omega)^{-1}$. La solution générale est donc :

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega} t \cos(\omega t),$$

on voit que la fonction n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ mais fait des oscillations de période ω mais d'amplitude de plus en plus grande quand t tend vers $+\infty$. Le pendule finit par se casser, c'est le phénomène de *résonance*.

1.5. Conditions initiales. On a vu que la solution générale d'une équation différentielle d'ordre $n = 1, 2$ dépend de 1 ou 2 constantes réelles. C'est un phénomène général : la solution générale d'une équation différentielle d'ordre n dépend de n constantes réelles. Pour les fixer, il faut imposer des *conditions initiales*. En général, on fixe un intervalle I et on choisit $x_0 \in I$. On considère le problème suivant :

$$(C) \quad \begin{cases} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}, \end{cases}$$

où les constantes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont fixées. Les conditions qu'on rajoute à l'équation

$$(E) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

sont appelées des *conditions initiales*.

Theorem 1.5. *Le problème (C) possède une solution unique, qui existe sur un intervalle $I_0 \subset I$ contenant x_0 .*

En pratique, on cherche la solution générale de (E) et on détermine les constantes arbitraires à l'aide des conditions initiales.

1.5.1. Exemple. On reprend l'équation du pendule forcé :

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos(\omega t),$$

à laquelle on rajoute les conditions initiales :

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

La solution générale est

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega} t \cos(\omega t),$$

on calcule

$$y'(t) = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t) - (2\omega)^{-1} \cos(\omega t) + \frac{t}{2} \sin(\omega t).$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y'(0) = C_2 \omega - (2\omega)^{-1} = 1, \end{cases}$$

on trouve donc $C_1 = 0$, $C_2 = \omega^{-1} + (2\omega)^{-2}$.

2. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

2.1. Définitions.

2.1.1. L'espace $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n -uplets $X = (x_1, \dots, x_n)$, en particulier le plan $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $X = (x_1, x_2)$, x_1 et x_2 étant les *coordonnées canoniques* du point $X = (x_1, x_2)$.

On peut employer d'autres coordonnées que les coordonnées canoniques, comme par exemple les coordonnées associées à un autre repère (pas nécessairement orthonormé) ou encore les coordonnées polaires, ce qui conduit à l'image intuitive du plan $\mathbb{R}^2$ comme une feuille de papier *blanche*. Choisir un système de coordonnées revient à équiper cette feuille blanche d'une grille de coordonnées, et a priori il n'y a pas de raison de choisir un système de coordonnées plutôt qu'un autre.

2.2. Fonctions de n variables.

Definition 2.1. Une fonction de n variables réelles (à valeurs réelles) est une application

$$f : \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n). \end{array}$$

Dans la suite on se restreindra au cas $n = 2, 3$. Il est courant dans la littérature d'utiliser les notations (x, y) au lieu de (x_1, x_2) , et (x, y, z) au lieu de (x_1, x_2, x_3) .

2.2.1. Graphe.

Definition 2.2. Le graphe d'une fonction de deux variables $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est le sous-ensemble $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\Gamma_f := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D, x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

De même que le graphe d'une fonction d'une variable réelle est typiquement une courbe dans $\mathbb{R}^2$, le graphe d'une fonction de deux variables réelles est typiquement une surface dans $\mathbb{R}^3$.

2.3. Lignes de niveau.

Definition 2.3. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble de niveau a de f est l'ensemble

$$f^{-1}(\{a\}) = \{(x_1, x_2) \in D : f(x_1, x_2) = a\}.$$

Remark 2.4. On parle aussi de ligne ou de courbe de niveau, l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ étant typiquement une courbe dans $\mathbb{R}^2$. Il est conseillé de méditer cependant les exemples suivants : soit

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Alors $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$ (une courbe de niveau peut être vide), et $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$ (une courbe de niveau peut être réduite à un point). Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = 0.$$

Alors $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^2$ (une courbe de niveau peut être une surface).

Il est facile de voir que deux courbes de niveau ne peuvent pas s'intersecter, sauf si elles sont confondues.

Lemma 2.5. Soit $a \neq b \in \mathbb{R}$. Alors $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$.

En dimension n on définit de même $L_a = \{x \in D : f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$, et on parlera de *surfaces de niveau* si $n = 3$.

2.3.1. Exemples. Soit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Alors

$$L_c = \begin{cases} \emptyset & \text{si } c < 0, \\ (0, 0) & \text{si } c = 0, \\ \text{le cercle de centre } (0, 0) \text{ et de rayon } r & \text{si } c > 0. \end{cases}$$

Soit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Alors

$$L_c = \begin{cases} \text{les deux axes } 0x_1, 0x_2 & \text{si } c = 0, \\ \text{une hyperbole d'axes } 0x_1, 0x_2 & \text{si } c \neq 0. \end{cases}$$

La preuve est évidente.

2.4. Fonctions partielles, dérivées partielles. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, ou pour simplifier la discussion on supposera que $D = I \times J$, où I, J sont deux intervalles. Pour $x_1 \in I$, resp. $x_2 \in J$ on peut fixer considérer les *fonctions partielles* :

$$f(x_1, \cdot) : J \ni y \mapsto f(x_1, y), \quad f(\cdot, x_2) : I \ni x \mapsto f(x, x_2).$$

On peut donc considérer f comme une famille, indexée par $x_1 \in I$ de fonctions d'une variable $f(x_1, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$. Il faut garder à l'esprit que ce point de vue est lié au choix des coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^2$. Si on change de coordonnées, par exemple en prenant un autre repère du plan, ou en utilisant des coordonnées polaires, les fonctions partielles changent.

On peut aussi définir les fonctions partielles en dimension n quelconque, en fixant les valeurs de $n - 1$ variables.

2.4.1. Ensembles ouverts. On rappelle que la distance (euclidienne) $d(X, X')$ entre deux points $X, X' \in \mathbb{R}^n$ est

$$d(X, X') = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|X - X'\|, \quad \text{où } \|X\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definition 2.6. Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert si pour tout $X_0 \in D$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } d(X_0, X) < \delta, \text{ on a } X \in D.$$

Si f est définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et si $X = (x_1, x_2) \in D$, les fonctions partielles $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot, x_2)$ sont définies sur un voisinage de x_2 , resp. x_1 .

2.5. Limites et continuité.

Definition 2.7. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur l'ouvert D , $X_0 \in D$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = l$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d(X, X_0) < \delta$ alors $|f(X) - l| < \epsilon$.

On dit que f est continue sur D si pour tout $X_0 \in D$ on a

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0).$$

Notons que comme D est ouvert, on peut toujours choisir δ assez petit pour que F soit définie en tout point X tel que $d(X, X_0) < \delta$.

2.6. Opérations sur les fonctions continues. Les somme, produit, quotient (quand il est défini) de fonctions continues sont continues. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue avec $f(D) \subset I$, alors $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Ces remarques permettent de montrer qu'une fonction de deux variables est continue. On vérifie d'abord que les fonctions coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ ($x_1, x_2) \mapsto x_2$ sont continues. On en déduit ensuite que les fonctions *polynômes* de deux variables sont continues.

2.6.1. Continuité partielle. La Définition 2.7 est la bonne notion de continuité d'une fonction de deux (ou plus généralement n variables). Il est important de ne pas la confondre avec une autre notion, celle de la *continuité partielle*, qui signifie que pour tout $X_0 = (a, b) \in D$ les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ resp. $y \mapsto f(a, y)$ sont continues au point a resp. b .

Cette notion correspond à regarder uniquement les limites de f quand on se déplace le long des axes de coordonnées. Il est facile de voir que la continuité implique la continuité partielle. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant. Soit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

On vérifie avec les remarques précédentes, que f est continue (et donc séparément continue) en tout point différent de $(0, 0)$. On a $f(0, x_2) = 0$ et $f(x_1, 0) = 0$ pour tout x_1, x_2 et donc f est séparément continue en $(0, 0)$. Si f était continue au point $(0, 0)$, on aurait en particulier $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = f(0, 0) = 0$, ce qui est impossible car $f(t, t) = \frac{1}{2}$ pour $t \neq 0$.

La figure suivante illustre la différence entre la limite et les limites partielles.



2.7. Dérivées partielles.

Definition 2.8. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sur D si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in D$ les fonctions partielles

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

sont dérivables en $t = x_i$. Les dérivées respectives sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ et appelées les dérivées partielles de f .

Definition 2.9. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$. f est dite de classe C^1 sur D si f admet des dérivées partielles continues sur D .

2.8. Formule de Taylor à l'ordre 1.

Theorem 2.10. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert D et $X_0 \in D$. Alors on a

$$f(X) = f(X_0) + (X - X_0) \cdot \vec{\nabla} f(X_0) + \|X - X_0\| \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow X_0} \epsilon(X) = 0,$$

où

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

est le gradient de f au point X_0 et on rappelle que

$$\|X\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

est la norme du vecteur X .

2.8.1. *Gradient et lignes de niveau.* La fonction : $D \in X \mapsto \vec{\nabla} f(X) \in \mathbb{R}^n$ est un exemple d' un *champ de vecteurs*, que l' on représente graphiquement en dessinant en quelques points de D le vecteur $\vec{\nabla} f(X)$ d' origine X . Voici, sans démonstration, et énoncées de manière intuitive, quelques propriétés importantes du champ de vecteurs $\vec{\nabla} f$:

- (1) $\vec{\nabla} f(X)$ est orthogonal à la ligne de niveau passant par X ,
- (2) $\vec{\nabla} f(X)$ pointe dans la direction où f augmente,
- (3) $\|\vec{\nabla} f(X)\|$ est d' autant plus grand que f varie rapidement au voisinage de X .

2.9. Applications.

2.9.1. *Dérivées de fonctions composées.*

Proposition 2.11. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l' ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l' intervalle I avec $f(D) \subset I$. Alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur D et*

$$\vec{\nabla}(g \circ f)(X) = g'(f(X)) \vec{\nabla} f(X), \quad X \in D.$$

Dém. C'est un simple calcul en utilisant la dérivée des fonctions composées pour calculer les dérivées partielles de $g \circ f$. $\square$

Proposition 2.12. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l' ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ et $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage avec $X(t)$ de classe C^1 sur l' intervalle I . Alors $f \circ X : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et*

$$(f \circ X)'(t) = \vec{\nabla} f(X(t)) \cdot \vec{X}'(t), \quad t \in I.$$

Dém. On utilise le même argument que dans la preuve de la Proposition 2.11. $\square$

2.9.2. *Extrema et points critiques.*

Définition 2.13. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie l' ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $X_0 \in D$ est un*

- (1) maximum resp. minimum de f sur D si

$$f(X) \leq f(X_0) \text{ resp. } f(X) \geq f(X_0) \quad \forall X \in D,$$

- (2) maximum resp. minimum local de f sur D si il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(X) \leq f(X_0) \text{ resp. } f(X) \geq f(X_0) \quad \forall X \in D \text{ avec } \|X - X_0\| < \delta.$$

Theorem 2.14. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l' ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ et $X_0 \in D$ un extremum local de f . Alors*

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \vec{0},$$

et on dit que X_0 est un point critique de f .

Dém. Soit X_0 un extremum local de f . Supposons que $\vec{\nabla} f(X_0) \neq \vec{0}$. Pour t assez petit on a par la formule de Taylor à l' ordre 1 :

$$f(X_0 + t \frac{\vec{\nabla} f(X_0)}{\|\vec{\nabla} f(X_0)\|}) = f(X_0) + t\epsilon(t),$$

où $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$. On en déduit que

$$f(X_0 + t \frac{\vec{\nabla} f(X_0)}{\|\vec{\nabla} f(X_0)\|}) > f(X_0) \text{ resp. } < f(X_0)$$

pour $t > 0$ resp. $t < 0$ assez petit. Ceci contredit le fait que X_0 est un extremum local de f . $\square$

Remark 2.15. Comme pour les fonctions d'une variable, les extrema locaux sont des points critiques, mais la réciproque est fausse. Par exemple la fonction

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

possède le point critique $(0, 0)$, qui n'est pas un extremum local.

2.10. Dérivées partielles secondes, matrice hessienne.

Definition 2.16. f est de classe C^2 sur D si f et les n fonctions $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sont de classe C^1 sur D .

On peut alors considérer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j} f)$, notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Theorem 2.17 (Lemme de Schwarz). Soit f de classe C^2 sur D . Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \forall x \in D, 1 \leq i, j \leq n.$$

A nouveau la conclusion du théorème est fausse si on ne suppose pas la continuité des dérivées partielles secondes. Donnons un exemple, qui sert aussi à illustrer comment calculer des dérivées partielles.

2.10.1. *Exemple.* Soit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

On va montrer que f admet des dérivées partielles secondes en $(0, 0)$ mais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0)$.

Calculons $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0)$: c'est la dérivée en $x_1 = 0$ de la fonction $x_1 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0)$. Il reste à calculer cette fonction. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)}{x_2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2^3}{x_2(x_1^2 + x_2^2)} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) = 0$.

Calculons ensuite $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0)$: c'est la dérivée en $x_2 = 0$ de la fonction $x_2 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2)$. Il reste à calculer cette fonction. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, x_2)}{x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2^3}{x_1(x_1^2 + x_2^2)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} = x_2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) = 1$.

2.10.2. *Matrice Hessienne.*

Definition 2.18. Soit f une fonction de classe C^2 sur D et $X_0 \in D$. On appelle matrice hessienne de f au point X_0 la matrice $n \times n$ notée $Hf(X_0)$ définie par

$$Hf(X_0) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) \right]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Si $n = 2$ on a

$$Hf(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(X_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_0) \end{bmatrix}.$$

Le lemme de Schwarz implique que $Hf(X_0)$ est une matrice *symétrique*, c'est à dire que

$$Hf(X_0)_{ij} = Hf(X_0)_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

2.10.3. Formule de Taylor à l'ordre 2.

Theorem 2.19 (Formule de Taylor à l'ordre 2). *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Alors pour tout $X_0 \in D$ et $X \in D$ on a*

$$f(X) = f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0) \cdot (X - X_0) + \frac{1}{2} (X - X_0) \cdot Hf(X_0) (X - X_0) + \|X - X_0\|^2 \epsilon(X)$$

où

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \epsilon(X) = 0.$$

2.11. Nature des points critiques. Soit f de classe C^2 sur l'ouvert D et $X_0 \in D$ un point critique de f . Pour savoir si X_0 est un extremum, il faut considérer la matrice hessienne $Hf(X_0)$.

Rappelons quelques résultats sur les matrices symétriques. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$ symétrique. On sait qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ formée de vecteurs propres de A , c'est à dire tels que $A\vec{u}_j = \lambda_j \vec{u}_j$, $1 \leq j \leq n$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ étant l'ensemble des valeurs propres de A .

Si $X \in \mathbb{R}^n$ et $X = \sum_{i=1}^n y_i \vec{u}_i$, on a $y_i = X \cdot \vec{u}_i$ et $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$, car la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est orthonormée.

On a donc

$$\begin{aligned} X \cdot AX &= (\sum_{i=1}^n y_i \vec{u}_i) \cdot A(\sum_{j=1}^n y_j \vec{u}_j) = \sum_{i,j} y_i y_j \vec{u}_i \cdot A\vec{u}_j \\ &= \sum_{i,j} y_i y_j \vec{u}_i \cdot \lambda_j \vec{u}_j = \sum_j \lambda_j y_j^2. \end{aligned}$$

On en déduit que si $\lambda_i > 0$ pour tout i alors

$$(2.1) \quad X \cdot AX \geq c \|X\|^2, \quad c = \min(\lambda_i) > 0,$$

et de même si $\lambda_i < 0$ pour tout i alors

$$(2.2) \quad X \cdot AX \leq c \|X\|^2, \quad c = \max(\lambda_i) < 0.$$

Theorem 2.20. *Soit f de classe C^2 sur l'ouvert D et $X_0 \in D$ un point critique de f .*

- (1) *si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement positives, resp. strictement négatives, alors X_0 est un minimum resp. maximum local de f ;*
- (2) *si $Hf(X_0)$ admet au moins deux valeurs propres non nulles de signe contraire, alors X_0 n'est pas un extremum local de f .*

Definition 2.21. *Si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont non nulles, mais pas toutes de même signe, on dit que X_0 est un point selle ou un point col de f .*

Dém. Montrons (1) dans le cas où toutes les valeurs propres sont strictement positives. On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 et (2.1) et on obtient :

$$f(X_0 + X) = f(X_0) + \frac{1}{2} X \cdot Hf(X_0) X + \|X\|^2 \epsilon(X) \geq f(X_0) + \|X\|^2 (c + \epsilon(X)),$$

où $c > 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$, ce qui montre que X_0 est un minimum local. Le cas où toutes les valeurs propres sont strictement négatives se traite de la même façon, en utilisant (2.2).

Montrons (2). Soit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ deux valeurs propres de $Hf(X_0)$ pour les vecteurs propres $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 on obtient que

$$f(X_0 + t\vec{u}_i) = f(X_0) + \frac{1}{2}t^2\lambda_i + t^2\epsilon(t),$$

où $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$. On en déduit que $f(X_0 + t\vec{u}_1) > f(X_0)$ et $f(X_0 + t\vec{u}_2) < f(X_0)$ pour t assez petit, et donc X_0 n'est pas un extremum local.

2.11.1. *Le cas de la dimension 2.* En dimension 2 il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres de $Hf(X_0)$ pour trouver la nature du point critique X_0 . En effet si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres d'une matrice 2×2 symétrique A (répétées avec leur multiplicité si besoin est), alors $\det A = \lambda_1\lambda_2$ et $\text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$, où la trace $\text{tr} A$ est la somme des entrées de A sur la diagonale.

On en déduit que

- (1) si $\det Hf(X_0) < 0$, X_0 est un point selle ;
- (2) si $\det Hf(X_0) > 0$ et $\text{tr} Hf(X_0) > 0$, X_0 est un minimum local ;
- (3) si $\det Hf(X_0) > 0$ et $\text{tr} Hf(X_0) < 0$, X_0 est un maximum local ;
- (4) si $\det Hf(X_0) = 0$ on ne peut rien conclure sur la nature de X_0 , on dira que X_0 est un *point critique dégénéré*.

3. INTÉGRALES CURVILIGNES

3.1. Arcs orientés.

Definition 3.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Un arc paramétré dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction

$$I \ni t \mapsto X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

avec

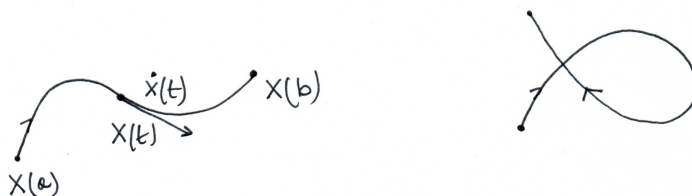
- (1) $x_i(t)$ de classe C^1 sur I
- (2) $\dot{X}(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in I$,
- (3) $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective, c'est à dire que $X(t_1) = X(t_2)$ si et seulement si $t_1 = t_2$.

Le vecteur $\dot{X}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ s'appelle le *vecteur vitesse* à l'instant t .

Il est important de distinguer la fonction $I \ni t \mapsto X(t)$ de son image

$$\gamma = \{X(t) : t \in I\},$$

qui est une courbe dans $\mathbb{R}^n$, appelée un *arc géométrique*. Le vecteur vitesse $\dot{X}(t)$ est *tangent* à γ au point $X(t)$, et pointe dans la direction des t croissants. L'arc γ représente la trajectoire parcourue par le point matériel $X(t)$ quand t parcourt I .



Dans la figure ci dessus la courbe de droite n'est pas un arc paramétré (le mobile $X(t)$ passe au même point en deux temps différents).

3.1.1. Changement de paramétrage.

Definition 3.2. Soit $I \ni t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ et $J \ni s \mapsto Y(s)$ deux arcs paramétrés. Ces deux arcs sont dits équivalents si il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow J$ bijective avec $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in I$ telle que

$$X(t) = Y(\varphi(t)), \quad \forall t \in I.$$

3.1.2. *Exemples.* Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les trois arcs paramétrés suivants :

- (1) $I = [0, 2\pi], X(t) = (\cos t, \sin t),$
- (2) $I = [0, \pi], X(t) = (\cos 2t, \sin 2t),$
- (3) $I = [0, 2\pi], X(t) = (\cos t, -\sin t).$

Dans les trois cas l'arc γ est le cercle unité. Les arcs paramétrés (1) et (2) sont équivalents, dans les deux cas γ est parcouru dans le sens anti-horaire. L'arc (3) n'est pas équivalent aux deux autres, car γ est parcouru dans le sens horaire.

Le changement de variables $s = \varphi(t)$ s'appelle un changement de paramétrage. On identifie deux arcs paramétrés équivalents, ce qui conduit à la notion d'*arc orienté*. Intuitivement un arc orienté est un arc géométrique (une courbe dans $\mathbb{R}^n$) qui ne se recoupe pas, et qui est décoré d'une flèche, représentant le sens de parcours.

On utilisera la notation $\widehat{\gamma}$ pour désigner un arc orienté.

3.1.3. *Changement d'orientation.* Soit $\widehat{\gamma}$ un arc orienté et $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de $\widehat{\gamma}$. On peut introduire la paramétrisation inverse, qui correspond à renverser le sens de parcours, en posant

$$\tilde{X}(t) = X(b + a - t).$$

On a $\tilde{X}(a) = X(b), \tilde{X}(b) = X(a)$. L'arc orienté correspondant sera noté $\widehat{\tilde{\gamma}}$.

3.2. Circulation d' un champ de vecteurs.

Definition 3.3. Soit $\widehat{\gamma}$ un arc orienté et $\mathbb{R}^n \ni X \mapsto \vec{v}(X) \in \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs. La circulation de $\vec{v}$ le long de $\widehat{\gamma}$, notée $\text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma})$ est le nombre :

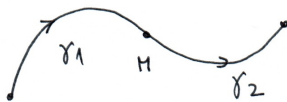
$$\text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma}) := \int_I \vec{v}(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt,$$

où $I \ni t \mapsto X(t)$ est une paramétrisation de $\widehat{\gamma}$.

Notons que pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier que la circulation ne dépend pas de la paramétrisation. Soit donc $J \ni s \mapsto Y(s)$ une autre paramétrisation équivalente, c'est à dire que $X(t) = Y(\varphi(t))$. On a donc $\dot{X}(t) = \dot{Y}(\varphi(t))\varphi'(t)$ et par changement de variables $s = \varphi(t)$ on obtient

$$\int_I \vec{v}(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt = \int_I \vec{v}(Y(\varphi(t))) \cdot \dot{Y}(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_I \vec{v}(Y(s)) \cdot \dot{Y}(s) ds.$$

3.2.1. Réunion de deux arcs orientés. Soit $\widehat{\gamma}$ un arc orienté et $M \in \gamma$. Soit $[a, b] \ni t \mapsto X(t)$ un paramétrage de $\widehat{\gamma}$ et $a < c < b$ l' unique temps tel que $M = X(c)$. On peut écrire $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_1 \cup \widehat{\gamma}_2$ où $[a, c] \ni t \mapsto X(t)$ est une paramétrisation de $\widehat{\gamma}_1$ et $[c, b] \ni t \mapsto X(t)$ une paramétrisation de $\widehat{\gamma}_2$.



On a évidemment :

$$\text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma}) = \text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma}_1) + \text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma}_2).$$

De même on a

$$\text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma}) = -\text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma}^*),$$

la circulation change de signe si on renverse l' orientation de $\widehat{\gamma}$.

3.2.2. Champs de gradient. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 . Soit $\widehat{\gamma}$ un arc orienté allant de A à B , c'est à dire que si $[a, b] \ni t \mapsto X(t)$ est un paramétrage de $\widehat{\gamma}$ on a $X(a) = A, X(b) = B$.

Proposition 3.4. On a :

$$\text{Circ}(\vec{\nabla} f, \widehat{\gamma}) = f(B) - f(A).$$

Dém. On a

$$\text{Circ}(\vec{v}, \widehat{\gamma}) = \int_{[a,b]} \vec{\nabla} f(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(X(t)) dt = f(B) - f(A). \quad \square$$

3.3. Longueur d' un arc. On définit maintenant la longueur d' un arc géométrique.

Definition 3.5. Soit γ un arc géométrique. La longueur de γ est le réel (positif)

$$l(\gamma) := \int_I \|\dot{X}(t)\| dt,$$

où $I \ni t \mapsto X(t)$ est un paramétrage de γ .

En dimension 2 où $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ on a bien sûr $\|\dot{X}(t)\| = (\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Comme pour la circulation, on vérifie que l' intégrale ne dépend pas du paramétrage. En effet si $J \ni s \mapsto Y(s)$ est un autre paramétrage de γ il existe une bijection $\varphi : I \rightarrow J$ tel que $X(t) = Y(\varphi(t))$. La dérivée $\varphi'(t)$ est de signe constant sur I , et $\dot{X}(t) = \dot{Y}(\varphi(t))\varphi'(t)$, donc $\|\dot{X}(t)\| = \|\dot{Y}(\varphi(t))\||\varphi'(t)|$. Par le changement de variable $s = \varphi(t)$ on obtient que

$$\int_I \|\dot{X}(t)\| dt = \int_J \|\dot{Y}(s)\| ds.$$

3.4. Intégrale d' une fonction le long d' un arc.

Definition 3.6. Soit γ un arc et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L' intégrale de f sur γ est :

$$\int_{\gamma} f dl := \int_I f(X(t)) \|\dot{X}(t)\| dt,$$

où $I \ni t \mapsto X(t)$ est un paramétrage de γ .

Le symbole dl est parfois appelé l' "élément de longueur". Pendant le temps dt le point matériel $X(t)$ parcourt la distance $\|\dot{X}(t)\|dt$, ce qui justifie de remplacer dl par $\|\dot{X}(t)\|dt$.

Si la fonction f est positive sur γ alors $\int_{\gamma} f dl$ est un réel positif.

Si la fonction f est la fonction constante égale à 1 on obtient

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} 1 dl = \int_{\gamma} dl.$$

Supposons que la fonction f représente une *densité de masse*, c' est à dire que $f(X)dl$ est la masse d' un petit arc de γ partant de $X \in \gamma$ et de longueur dl . Alors $\int_{\gamma} f dl$ représente la masse totale de l' arc γ . La même interprétation est valable si f représente une *densité de charge*.

4. INTÉGRALES DOUBLES

4.1. Introduction. On veut définir et calculer l' intégrale double d' une fonction f sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, notée

$$I = \iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Sans donner la définition rigoureuse d' une intégrale double (intégrale de Riemann), rappelons simplement quelques propriétés que la notion d' intégrale doit vérifier :

- (1) l' intégrale $\iint_D 1 dx_1 dx_2$ doit être égale à l' *aire* du domaine D , notée $A(D)$.
- (2) si la fonction f est *positive* sur D alors $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ doit être un réel positif.
- (3) si $f(X) = \lambda_1 f_1(X) + \lambda_2 f_2(X)$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \lambda_1 \iint_D f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \lambda_2 \iint_D f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Donnons maintenant quelques méthodes pour calculer des intégrales doubles. On se ramène toujours à calculer des intégrales simples successives. La méthode de base repose sur le théorème de Fubini, que nous n'énoncerons pas, mais que nous allons expliquer dans des cas simples.

4.2. Cas d'un pavé parallèle aux axes.

Theorem 4.1. Supposons que $D = I_1 \times I_2$ où $I_i = [a_i, b_i]$ (D est donc un rectangle, aux cotés parallèles aux axes de coordonnées) et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

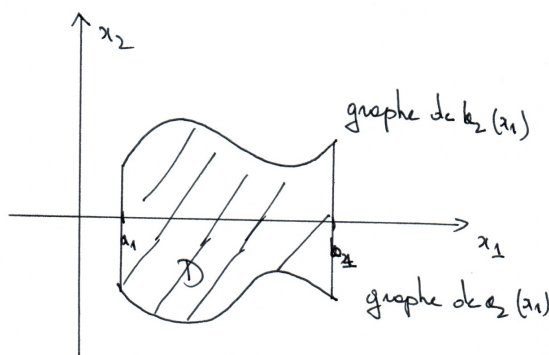
4.3. Cas plus général. Il est toujours fortement conseillé de dessiner d'abord le domaine D .

Theorem 4.2. Supposons que

$$D = \{(x_1, x_2) : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1)\}$$

et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$



A cause de la forme du domaine D on voit qu'il vaut mieux intégrer d'abord en x_2 , puis en x_1 .

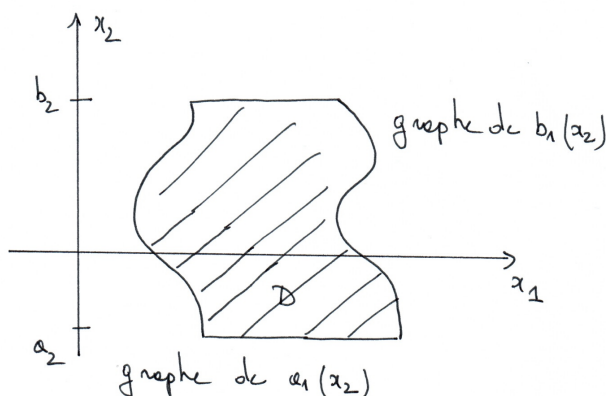
Dans l'exemple suivant, il vaut mieux intégrer d'abord en x_1 , puis en x_2 :

Theorem 4.3. Supposons que

$$D = \{(x_1, x_2) : a_1(x_2) \leq x_1 \leq b_1(x_2), a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1(x_2)}^{b_1(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$



4.4. Changement de variables. Soit

$$\chi: \tilde{D} \rightarrow D \\ (y_1, y_2) \mapsto \chi(y_1, y_2) = (x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)),$$

qu' on interprète comme le changement de variables entre coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) et de nouvelles coordonnées (y_1, y_2) , la transformation χ servant à exprimer les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) en fonction des nouvelles coordonnées (y_1, y_2) . Le domaine $\tilde{D}$ correspond à D , exprimé dans les nouvelles coordonnées (y_1, y_2) .

4.4.1. Coordonnées polaires. L' exemple standard est donné par les coordonnées polaires (r, θ) où $r \in [0, +\infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ et $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

Dans le cas général on calcule la matrice

$$D\chi(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

et on pose

$$|D\chi(y_1, y_2)| = \det D\chi(y_1, y_2),$$

appelé le *jacobien* de χ .

Theorem 4.4 (Changement de variable dans les intégrales doubles). *On a*

$$\int_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\tilde{D}} f \circ \chi(y_1, y_2) |D\chi(y_1, y_2)| dy_1 dy_2.$$

Dans le cas des coordonnées polaires on a

$$D\chi(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}, \quad |D\chi(r, \theta)| = r,$$

ce qui conduit à la formule bien connue

$$dx dy = r dr d\theta.$$

5. FORMES DIFFÉRENTIELLES ET FORMULES DE STOKES

5.1. Le langage des formes différentielles. Fixons $D \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$.

5.1.1. Formes différentielles de degré 0. Une *forme différentielle* de degré 0 sur D est simplement une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

5.1.2. *Formes différentielles de degré 1.* Une *forme différentielle* de degré 1 sur D est une expression

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) dx_i, \quad f_i : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ des fonctions sur } D.$$

Par exemple en dimension 2 une forme différentielle de degré 1 est une expression $f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$.

Pour l'instant, on évite d'attacher une signification précise aux symboles dx_1 , dx_2 etc. Il suffit se rappeler que ces symboles figurent d'habitude sous des signes d'intégration, et donc que des formes différentielles sont destinées à être intégrées, sur des courbes, sur des surfaces etc.

5.1.3. *Le produit extérieur.* On rajoute dans notre liste de symbole le *produit extérieur*, c'est à dire qu'on considère aussi des expressions comme $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_2 \wedge dx_3$, $dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$ etc. Les règles de calcul sont les mêmes que celles du produit vectoriel : on a

$$(5.1) \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

et donc comme $dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i$

$$dx_i \wedge dx_i = 0.$$

Il est important de distinguer par exemple entre le symbole $dx_1 dx_2$ qui désigne un élément d'aire infinitésimal et le symbole $dx_1 \wedge dx_2$ qui désigne un élément d'aire infinitésimal *orienté*. En effet $dx_1 dx_2$ est égal à $dx_2 dx_1$ (on peut intégrer les variables dans n'importe quel ordre dans une intégrale double), mais $dx_2 \wedge dx_1$ est égal à $-dx_1 \wedge dx_2$, car le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est direct, et le repère $(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$ est indirect.

5.1.4. *Formes différentielles de degré 2.* Une *forme différentielle* de degré 2 sur D est une expression

$$\alpha = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i \wedge dx_j, \quad f_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ des fonctions sur } D.$$

Comme $dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i$ on peut aussi écrire une 2-forme comme

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i \wedge dx_j,$$

où $g_{ij} = f_{ij} - f_{ji}$. En particulier une forme de degré 2 dans $\mathbb{R}^2$ s'écrit simplement

$$\omega = f(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2.$$

5.1.5. *Formes différentielles de degré supérieur à 2.* Il est facile de deviner qu'une forme différentielle de degré d est une expression

$$\alpha = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_d} f_{i_1 i_2 \dots i_d}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}.$$

Les règles de calcul pour des expressions du type $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}$ sont toujours les mêmes, basées sur l'antisymétrie : permuter deux symboles dx_i et dx_j côte à côte revient à multiplier le résultat par -1 . Par exemple

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= (dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_3 = -(dx_2 \wedge dx_1) \wedge dx_3 = -dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &= -dx_2 \wedge (dx_1 \wedge dx_3) = -(-dx_2 \wedge (dx_3 \wedge dx_1)) = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1. \end{aligned}$$

En dimension 2 une forme de degré supérieur ou égal à 3 vaut 0 : en effet en appliquant (5.1) on a par exemple

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0 \wedge dx_2 = 0.$$

Plus généralement en dimension n une forme de degré $d > n$ est nulle.

5.2. La dérivée extérieure. On introduit une opération, appelée *dérivée extérieure*, qui fabrique une forme de degré $d + 1$ à partir d'une forme de degré d . En dimension 3, la dérivée extérieure correspond au gradient ou au *rotationnel* suivant le degré de la forme à laquelle on l'applique, mais est beaucoup plus maniable, en particulier parce que les formules sont valables dans n'importe quel système de coordonnées.

Définition 5.1. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une forme de degré 0 (c'est à dire une fonction). On pose

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i.$$

Il est tentant de confondre df et le gradient $\vec{\nabla} f$, mais il vaut mieux l'éviter.

Notons par x_i la fonction *coordonnée* $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, qui associe à un point X sa i -ème coordonnée. On a alors

$$dx_i = dx_i,$$

où dans le membre de gauche dx_i désigne la différentielle extérieure de la fonction x_i .

Définition 5.2. Soit

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

une forme de degré 1. On pose

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_i.$$

Par exemple si $n = 2$ et $\alpha = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ on obtient

$$\begin{aligned} d\alpha &= (\partial_{x_1} f_1 dx_1 + \partial_{x_2} f_1 dx_2) \wedge dx_1 + (\partial_{x_1} f_2 + \partial_{x_2} f_2) dx_2 \\ (5.2) \quad &= (\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1) dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

en développant les parenthèses et en utilisant les règles (5.1) sur les propriétés de $\wedge$.

Proposition 5.3. Soit ω une forme différentielle. Alors on a

$$d \circ d\omega = 0.$$

Dém. Montrons simplement la proposition en dimension 2, la preuve en dimension quelconque étant analogue mais plus pénible. Si ω est de degré 1 ou 2 alors $d \circ d\omega$ est de degré 3 ou 4 donc vaut 0 comme nous sommes en dimension 2. Si ω est de degré 0, alors $\omega = f$ est une fonction et en appliquant (5.2) à $\alpha = df$ on obtient

$$d \circ d\omega = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

à cause du lemme de Schwarz. $\square$

5.3. Changement de coordonnées. Les formules pour exprimer par exemple la vitesse ou l'accélération dans des coordonnées autres que cartésiennes (cylindriques, sphériques) sont notoirement compliquées et difficiles à retenir. C'est bien plus simple pour les formes différentielles.

Soit donc $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n)$ un nouveau système de coordonnées. Le lien entre les deux systèmes est donné par

$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq i \leq n$$

qui permet d'exprimer les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles. Soit

$$\omega = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_d} f_{i_1 i_2 \dots i_d}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}$$

une forme différentielle, exprimée dans les coordonnées cartésiennes. Pour trouver son expression dans les nouvelles coordonnées, il suffit de considérer dx_i comme la différentielle de la fonction $x_i(y_1, \dots, y_n)$, dans les nouvelles coordonnées. On remplace donc dx_i par

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} x_i(y_1, \dots, y_n) dy_j,$$

et x_i par $x_i(y_1, \dots, y_n)$ dans l'expression de ω pour obtenir ω dans les nouvelles coordonnées.

Par exemple pour passer dans $\mathbb{R}^2$ des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) aux coordonnées polaires (r, θ) il suffit de se souvenir que

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

et donc

$$dx_1 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dx_2 = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

Une 1-forme $\alpha = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$ s'écrit donc en polaires comme

$$\alpha = f_1(r \cos \theta, r \sin \theta)(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + f_2(r \cos \theta, r \sin \theta)(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta),$$

et on termine le calcul en développant les parenthèses.

Par exemple la forme $\alpha = x_2 dx_1 - x_1 dx_2$ s'écrit en polaires comme

$$\alpha = r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) - r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) = -r^2 d\theta.$$

5.4. Intégration des formes différentielles. On retiendra qu'une forme différentielle de degré d peut s'intégrer sur un 'espace' de dimension d orienté. Une forme de degré 1 s'intègre donc sur un arc orienté (dans $\mathbb{R}^n$), une forme de degré 2 sur une surface orientée etc.

Le cas des formes de degré 0 est particulier : un espace de dimension 0 est un point (ou une collection de points), et l'"intégrale" d'une fonction f sur un point X_0 est simplement sa valeur en X_0 , $f(X_0)$.

5.4.1. Intégrale des formes de degré 1.

Définition 5.4. Soit $\widehat{\gamma}$ un arc orienté dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i(X) dx_i$ une forme de degré 1. On définit l'intégrale de α sur $\widehat{\gamma}$ notée $\int_{\widehat{\gamma}} \alpha$ par

$$\int_{\widehat{\gamma}} \alpha := \int_I \sum_{i=1}^n f_i(X(t)) \dot{x}_i(t) dt,$$

où $I \ni t \mapsto X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ est un paramétrage de $\widehat{\gamma}$.

Cette définition est évidemment similaire à celle de la circulation d'un champ de vecteurs. Néanmoins elle présente un avantage important : on peut calculer $\int_{\tilde{\gamma}} \alpha$ en utilisant n'importe quel système de coordonnées. Il suffit d'exprimer α et le paramétrage de $\tilde{\gamma}$ dans ces coordonnées.

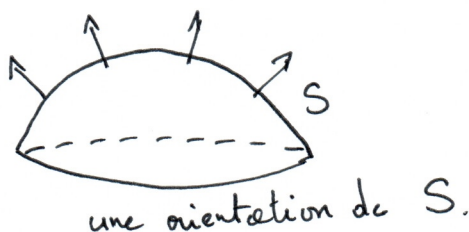
5.4.2. *Intégrale des formes de degré 2.* Nous allons seulement donner la définition en dimension 2 et 3 (la dimension 3 étant hors programme).

Dans $\mathbb{R}^2$ un espace de dimension 2 est simplement un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definition 5.5. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $\alpha = f(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$ une forme de degré 2. On définit

$$\int_D \alpha := \int_D f(x_1, x_2)dx_1 dx_2$$

Dans $\mathbb{R}^3$ un espace de dimension 2 est une surface S . On a vu qu'orienter un arc revient à choisir un sens de parcours. Orienter une surface dans $\mathbb{R}^3$ est un peu plus compliqué : il faut pour cela fixer une façon de 'traverser' la surface, c'est à dire fixer un choix continu d'un vecteur $\vec{n}$ normal à S .



Il faut d'autre part comprendre ce que signifie paramétrer une surface dans $\mathbb{R}^3$: pour cela on fixe un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ (l'espace des paramètres) et une application

$$X : \begin{array}{l} D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s) \mapsto X(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s)). \end{array}$$

La surface S est simplement l'image de X :

$$S = \{X(t, s) : (t, s) \in D\},$$

et on dit que $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un *paramétrage* de S .

Par exemple en prenant $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + s^2 \leq 1\}$ et

$$X(t, s) = (t, s, \sqrt{1 - t^2 - s^2}),$$

la surface S est la demi sphère supérieure

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}.$$

Pour $(t, s) \in D$ les vecteurs

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t}(t, s) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t}(t, s) \\ \frac{\partial x_3}{\partial t}(t, s) \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial X}{\partial s}(t, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s}(t, s) \\ \frac{\partial x_2}{\partial s}(t, s) \\ \frac{\partial x_3}{\partial s}(t, s) \end{pmatrix}$$

sont tangents à la surface S . Le paramétrage $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est *compatible avec l'orientation* de S , si en tout point $X(t, s)$ de S , le trièdre $(\frac{\partial X}{\partial t}(t, s), \frac{\partial X}{\partial s}(t, s), n(t, s))$ est *direct*, où $n(t, s)$ est le vecteur normal à S au point $X(t, s)$.

Soit maintenant $\alpha = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} f_{ij}(X) dx_i \wedge dx_j$ une forme de degré 2. On remplace X par $X(t, s)$ et dx_i par

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}(t, s)dt + \frac{\partial x_i}{\partial s}(t, s)ds,$$

la forme α sur la surface S devient donc une expression de la forme

$$\alpha = g(t, s)dt \wedge ds.$$

L'intégrale $\int_S \alpha$ de α sur S est alors définie comme

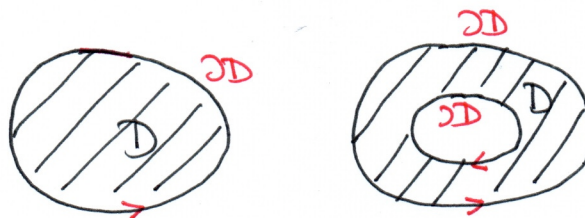
$$\int_S \alpha := \iint_D g(t, s)dt ds.$$

5.5. La formule de Stokes. Cette formule et certaines de ses variantes sont aussi connues sous le nom de formule de Gauss, Green, Ostrogradsky etc.

5.5.1. Le bord d'un arc ou d'une surface orientés. Commençons par définir le bord d'un arc orienté $\widehat{\gamma}$. Si $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un paramétrage compatible de $\widehat{\gamma}$, le *bord* de $\widehat{\gamma}$, noté $\partial \widehat{\gamma}$ est la réunion des deux extrémités $A = X(a)$ et $B = X(b)$. A étant le point initial et B le point final de $\widehat{\gamma}$, on affecte A d'un signe $-$ et B d'un signe $+$, c'est à dire qu'on 'oriente' le bord $\{A, B\}$ de $\widehat{\gamma}$.

Considérons maintenant une surface S dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Son bord ∂S est sa frontière, c'est une courbe γ . Il reste à lui fixer un sens de parcours. On adopte la convention que si l'on parcourt γ dans le sens de la flèche, la surface S sera toujours sur la *gauche*.

Le bord ∂S devient donc un arc orienté.



orientation du bord de D .

Theorem 5.6 (La formule de Stokes). *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une surface orientée ($n = 2, 3$) et α une forme de degré 1 dans $\mathbb{R}^n$. Soit ∂S le bord de S , orienté par S comme expliqué ci dessus. Alors on a*

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha.$$

Ce théorème est aussi valable si on remplace S par un arc orienté $\widehat{\gamma}$. Le bord de $\widehat{\gamma}$ est formé de ses deux extrémités $\{A, B\}$ et on a

$$\int_{\widehat{\gamma}} df = f(B) - f(A),$$

le signe $-$ devant $f(A)$ provenant de l' "orientation" de $\{A, B\}$ expliquée plus haut. Notons qu' on a déjà vu ce résultat dans la section sur les intégrales curvilignes.

Donnons enfin une version plus explicite de la formule de Stokes en dimension 2. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine et $\alpha = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2$ une forme de degré 1 sur D on a

$$\int_{\partial D} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

5.6. Gradient, rotationnel. Rappelons d' abord quelques formules usuelles dans les cours de physique. On convient de noter par $\vec{\nabla}$ le symbole

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix}.$$

Le gradient $\text{grad} f$ d' une fonction se note alors simplement par

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \partial_{x_3} f \end{pmatrix},$$

le rotationnel $\text{rot} \vec{v}$ d' un champ de vecteur $\vec{v}$ par

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \text{ ou } \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

$\vec{u} \times \vec{v}$ désignant le produit vectoriel, et la divergence $\text{div} \vec{v}$ d' un champ de vecteur $\vec{v}$ par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2 + \partial_{x_3} v_3.$$

Comme $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ on retient par exemple facilement que $\text{div} \circ \text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$.

5.6.1. Lien entre champs de vecteurs et formes différentielles. Dans ce cours, nous avons systématiquement utilisé le langage des formes différentielles. Bien qu' il soit plus difficile de se représenter concrètement une forme différentielle qu' un champ de vecteurs, l' avantage de ce langage réside dans son indépendance des choix de coordonnées.

Le lecteur non convaincu est invité à calculer le rotationnel d' un champ de vecteurs en coordonnées sphériques. Il nous reste à donner le lien entre formes différentielles et champs de vecteurs.

Une forme différentielle de degré 1

$$\alpha = f_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + f_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

est identifiée au champ de vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Une forme différentielle de degré 2

$$\alpha = f_1(x_1, x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2$$

est identifiée au champ de vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Après ces identifications :

- (1) le gradient et le rotationnel correspondent à la dérivée extérieure, (pour les formes de degré 0 et 1 respectivement) ;
- (2) l' intégrale d' une forme de degré 1 sur un arc correspond à la circulation du champ de vecteurs correspondant ;
- (3) l' intégrale d' une forme de degré 2 sur une surface correspond au flux du champ de vecteurs correspondant.