

Feuille d'exercices 1

1. Résoudre les équations différentielles:

$$y' = t^2/y^2, \quad y' = y^2 t^3, \quad (1+t^2)y' = 1+y^2, \\ y' = (1+t)(1+y), \quad y' = y^2 - 2y + 2.$$

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2x(y^2 + 9)$ en discutant les intervalles maximaux d'existence des solutions.

3. Résoudre les problèmes:

a) $e^y y' - t - t^3 = 0$, $y(1) = 1$, b) $\frac{1}{1+y^2} y' = 1$, $y(0) = 0$, c) $\frac{1}{1+y^2} y' = 1$, $y(0) = 1$,

4. On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad y' = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}.$$

a) On pose $y(x) = xv(x)$. Ecrire l'équation différentielle (E') vérifiée par v .

b) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) , en discutant soigneusement les intervalles maximaux d'existence.

5. Résoudre les équations différentielles:

$$y' - 5y = t, \quad y' + 3y = e^{-2t}, \\ y' + y = \sin t, \quad y' + 2ty = 0, \quad y' + 2ty = t, \\ y' + y \cos t = 0, \quad y' + \frac{2t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2},$$

6. Résoudre les problèmes:

a) $y' + (\sin t)y = 0$, $y(0) = 3/2$, b) $y' + 2ty = t$, $y(1) = 2$,

7. Soit l'équation différentielle:

$$(E) \quad y' + y = xy^3.$$

a) On pose $v = y^{-2}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si v est solution de

$$(E') \quad v' - 2v = -2x.$$

b) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .

8. Résoudre les équations différentielles:

$$y'' + 4y' - 5y = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad y'' + 2y' + 2y = 0, \\ y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y'' + 2y' - 10y = 7e^t,$$

$$y'' + 4y = \cos(2t), \quad y'' + y = t \sin(2t), \quad y'' - y = -\cos t.$$

9. En posant $z = xy$, résoudre l'équation différentielle $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$.

Feuille d'exercices 2

1. Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine?

$$f_1(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_2(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \quad f_3(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2},$$

3. Etudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} x^4, & y > x^2, \\ y^2, & y \leq x^2. \end{cases}$$

4. Calculer les dérivées partielles (là où elles sont définies) des fonctions suivantes:

$$f_1(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f_3(x, y) = \sin(x + \cos y),$$

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Calculer $g'(t)$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow f(y/x)$. Calculer les dérivées partielles de $g(x, y)$.

$$7. \text{ Soit la fonction } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Etudier la continuité et l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$ en $(0, 0)$.

8. Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^2 et soit $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Ecrire les expressions suivantes en utilisant la fonction de F , r et θ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Soient $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $v(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Montrer que $\nabla f = \frac{\partial F}{\partial r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} v$.

9. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes. Pour chaque point critique vérifier si il s'agit d'un extremum local ou d'un point-selle.

$$f_1(x, y) = x^3 + y^3, \quad f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y, \quad f_3(x, y) = x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2), \\ f_4(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2, \quad f_5(x, y) = xy^2 + x^2 - y^2 - x.$$

Feuille d'exercices 3

- Calculer la circulation $\text{Circ}(\vec{V}, \vec{\gamma})$, du champs de vecteurs $\vec{V}$, le long de la courbe $\vec{\gamma}$, dans les cas suivants:
 - $\vec{V} = (x^2, xy)$ et $\vec{\gamma}$ est le segment reliant les points $A(0, 1)$ et $B(1, 0)$, parcouru de A à B .
 - $\vec{V} = (xy, y-z, -x)$ et $\vec{\gamma}$ est le segment reliant les points $A(0, 1, 1)$ et $B(2, 2, 2)$, parcouru de A à B .
 - $\vec{V} = (xy, -x)$ et $\vec{\gamma}$ est le morceau du graphe $y = x^2$ compris entre $(-1, 1)$ et $(1, 1)$.
 - $\vec{V} = ((x+y)^2, 0)$ et $\vec{\gamma}$ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ parcouru dans le sens horaire.
- Montrer que $\text{Circ}(\vec{V}, \vec{\gamma}) = 0$, dans les cas suivants:
 - $\vec{V} = (x^5, -y^7)$ et $\vec{\gamma}$ est le cercle $x^2 + y^2 = 4$ parcouru dans le sens anti-horaire.
 - $\vec{V}(x, 0)$ et $\vec{\gamma}$ est la courbe d'équation $x^2 + 2xy + 5y^2 = 4$.
- Calculer $\int_{\gamma} f \, d\ell$ pour les cas suivants:
 - $f(x, y) = xy$ et γ est le morceau de la droite entre les points $(1, 1)$ et $(-1, 0)$.
 - $f(x, y) = x + y$ et γ est le morceau de la droite $y = 2x - 3$ entre $x = -1$ et $x = 1$.
 - $f(x, y) = (1 - x)(1 + y)$ et γ est le cercle $x^2 + y^2 = 1$.
- Dans les cas suivants, dessiner le domaine D , représenter D sous la forme $D = \{(x, y) : x \in [a, b], c(x) \leq y \leq d(x)\}$ ou $D = \{(x, y) : y \in [c, d], a(y) \leq x \leq b(y)\}$ et calculer l'intégrale $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$.
 - $f(x, y) = (x + y)^2$, $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.
 - $f(x, y) = \sin^2(x - 2y)$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$.
 - $f(x, y) = (x + y)^2$, D est l'intérieur du triangle délimité par les droites $x = 2$, $y = 0$ et $y = x$.
 - $f(x, y) = (x + y)^2$, D est l'intérieur du triangle délimité par les droites $x = 1$, $y = 1$ et $y = 1 - x$.
 - $f(x, y) = (x + y)^2$, D est l'intérieur du triangle délimité par les droites $x = 0$, $y = 2$ et $y = 2x$.
- Représenter D en utilisant les coordonnées polaires (ou une modification) et calculer l'intégrale $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$.
 - $f(x, y) = x^2$, D est le disque de rayon 2 centré sur l'origine.
 - $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, D est l'anneau délimité par les cercles $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = \pi^2$.
 - $f(x, y) = x$, D est l'intersection du disque $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ avec le demi-plan $y \geq 0$.
- Calculer l'aire du domaine limité par les paraboles $y^2 = 3 - x$, $y^2 = 3 - 3x$ et $x \geq 0$.
 - Calculer l'aire du disque de rayon $R > 0$ et de centre $(0, 0)$.
 - Calculer l'aire de l'ellipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leq 1$, où $a, b > 0$.

Feuille d'exercices 4

1. (Indication: On peut utiliser la formule de Green-Riemann.)
 a) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
 b) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation polaire $r = 2 + \cos \theta$.
 c) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2y)$ sur le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ parcouru dans sens anti-horaire.

2. Calculer $d\omega$ pour les formes différentielles ω suivantes. Si $d\omega = 0$ trouver une fonction f telle que $\omega = df$.

- a) $\omega = (x - y^2) dy + (y + x^2) dx$.
 b) $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$.
 c) $\omega = (x^2 + y^2) dx + xy dy$.
 d) $\omega = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} dy + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dz$.

3. Calculer l'intégrale

$$\int_{\vec{\gamma}} y dx - z dy + x dz,$$

où $\vec{\gamma}$ est la courbe: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \cos t$, $z = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. Calculer l'intégrale

$$\int_{\vec{\gamma}} z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz,$$

où $\vec{\gamma}$ est la courbe: $x(t) = 1 + \cos t$, $y(t) = -1 + \cos t$, $z = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

5. Calculer l'intégrale

$$\int_{\vec{\gamma}} \frac{z + y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + z}{x^2 + y^2} dy + \frac{1}{x^2 + y^2} dz,$$

où $\vec{\gamma}$ est la courbe de l'hélice: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Calculer $\int_{\vec{\gamma}} \omega$ dans le cas où $\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ et $\vec{\gamma}$ est le cercle centré sur l'origine et de rayon $R > 0$.

7. a) Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $df = 2x \sin y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy$.

b) Calculer l'intégrale

$$\int_{\vec{\gamma}} 2x \sin y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy,$$

où $\vec{\gamma}$ est un chemin qui relie $(1, 0)$ et $(5, 1)$.

Feuille d'exercices 5

1. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par

$$D = \{(x, y) : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos x\}.$$

a) Dessiner D .

b) Soit γ le bord de D , orienté par D . En utilisant la formule de Green-Riemann calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} (1 + \sin y)e^x dx + (1 + \cos y)e^x dy.$$

2. Soit le domaine :

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

a) Dessiner le domaine D .

b) En utilisant la formule de Green, calculer l'intégrale :

$$\iint_D (x + y)e^{-x}e^{-y} dx dy.$$

3. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par

$$D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq x\}.$$

a) Dessiner D .

b) Soit γ le bord de D , orienté par D . Ecrire γ comme l'union de deux arcs orientés γ_1 et γ_2 et calculer l'intégrale

$$I = \int_{\gamma} (y + xy) dx.$$

c) En utilisant la formule de Green-Riemann retrouver la valeur de cette intégrale.

4. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\sqrt{1-x^2}\}.$$

a) Dessiner le domaine D .

b) Soit γ le bord de D . Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} y dx$$

c) Quelle orientation faut-il choisir pour γ pour appliquer la formule de Green?

d) En utilisant la formule de Green calculer l'aire de D .

5. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par :

$$D = \{(x, y) : y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}.$$

a) Dessiner D .

b) Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D |x|y^2 \, dx dy$$

6. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par :

$$D = \{(x, y) : x \leq 1, y \geq 0, y^2 \leq x\}.$$

a) Dessiner D .

b) Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D yx^2 \, dx dy$$

7. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par :

$$D = \{(x, y) : (x - 1)^2 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

a) Dessiner D .

b) Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D xy \, dx dy.$$

8. Calculer les intégrales :

$$\iint_D y \, dx dy, \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

$$\iint_D x^2 y \, dx dy, \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x, y \geq 0\}.$$