Corrigé du partiel de Mathématiques Master 1 Mécanique

Durée 2h.

Le Lundi 26 Octobre 2009.

Exercice 1.

1) Les formules connues pour les coordonnées sphériques donnent le paramétrage :

$$[0,\pi]\times[0,2\pi]\ni(\varphi,\theta)\mapsto x(\varphi,\theta)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)\in S.$$

2) Le vecteur normal unitaire extérieur au point $x(\varphi,\theta)$ est évidemment :

$$\vec{\nu}(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

3) Au point $x=x(\varphi,\theta)\in S$ on a :

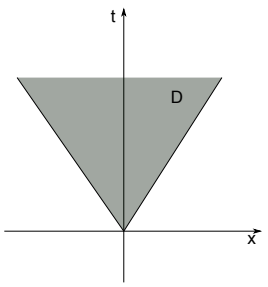
$$\vec{\nu}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ \vec{F}(x)\cdot\vec{\nu}(x)=x_1^2+x_2^2+x_3=1-x_3^2+x_3=1-\cos^2\varphi+\cos\varphi,$$

en utilisant que $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ comme $x\in S$. D'autre part l'élément d'aire d^2S sur la sphère unité s'écrit en coordonnées sphériques $d^2S=\sin\varphi d\varphi d\theta$. L'intégrale donnant le flux est donc :

$$\begin{aligned}I=&\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi+\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\\ =&\ 2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi-\sin\varphi\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\\ =&\ 2\pi\left[-\cos\varphi+\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi-\tfrac{1}{2}\cos^2\varphi\right]_0^{\pi}\\ =&\ 2\pi\times\tfrac{4}{3}=\tfrac{8\pi}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1) Le domaine D est l'intérieur du demi cône positif.



2) Pour la première identité, on intègre d'abord en t pour x fixé, l'intégrale en t porte sur l'intervalle $[|x|, +\infty[$, l'intégrale en x porte sur $\mathbb{R}$. Pour le deuxième on intègre d'abord en x pour t fixé, l'intégrale en x porte sur l'intervalle $[-t, t]$, l'intégrale en t porte sur $[0, +\infty[$.

3) On utilise la première formule pour calculer $\iint_D \partial_t v(t,x)dtdx$. On obtient

$$\begin{aligned}\iint_D \partial_t v(t,x)dtdx = & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{|x|}^{+\infty} \partial_t v(t,x)dt \\ = & -\int_{-\infty}^{+\infty} v(|x|,x)dx \\ = & -\int_0^{+\infty} v(s,s)ds - \int_{-\infty}^0 v(-s,s)ds.\end{aligned}$$

On utilise la deuxième formule pour calculer $\iint_D -\partial_x v(t,x)dtdx$. On obtient :

$$\begin{aligned}\iint_D -\partial_x v(t,x)dtdx = & \int_0^{+\infty} dt \int_{-t}^{t} -\partial_x v(t,x)dx \\ = & \int_0^{+\infty} v(t,-t) - v(t,t)dt \\ = & \int_0^{+\infty} v(s,-s)ds - \int_0^{+\infty} v(s,s)ds.\end{aligned}$$

Par changement de variable $s \to -s$ on voit que :

$$\int_0^{+\infty} v(s,-s)ds = \int_{-\infty}^0 v(-s,s)ds.$$

En ajoutant les deux termes on obtient le résultat.

4) On calcule

$$\begin{aligned}& (\partial_t - \partial_x)(\partial_t\varphi + \partial_x\varphi) \\ = & \partial_t^2\varphi - \partial_x^2\varphi + \partial_t\partial_x\varphi - \partial_x\partial_t\varphi \\ = & \partial_t^2\varphi - \partial_x^2\varphi,\end{aligned}$$

à cause de la relation de Schwarz.

5) On applique la formule précédente à $v(t,x) = \partial_t\phi(t,x) + \partial_x\varphi(t,x)$. On obtient que :

$$\iint_D \partial_t^2\varphi(t,x) - \partial_x^2\varphi(t,x)dtdx = -2\int_0^{+\infty} \partial_t\varphi(s,s) + \partial_x\varphi(s,s)ds.$$

On remarque que si $f(s) = \varphi(s,s)$ alors $f'(s) = \partial_t\varphi(s,s) + \partial_x\varphi(s,s)$. On obtient donc

$$-2\int_0^{+\infty} f'(s)ds = 2f(0) = 2u(0,0),$$

comme $f(+\infty) = 0$.

Exercice 3.

1) On pose $x = (x_1, x_2)$. L'équation des courbes caractéristiques est :

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds}(s) = 1, \\ \frac{dx_1}{ds}(s) = x_2(s), \\ \frac{dx_2}{ds}(s) = -x_1(s), \end{cases}$$

avec les conditions initiales $t(0) = t^0$, $x(0) = x^0$. On trouve comme d'habitude $t(s) = t^0 + s$ et on a $x_1''(s) = x_2'(s) = -x_1(s)$. On obtient donc la solution :

$$x_1(s) = x_1^0\cos s + x_2^0\sin s,\ \ x_2(s) = -x_1^0\sin s + x_2^0\cos s.$$

En notant $x(s) = X(s, t^0, x^0)$ on sait d'après le cours que la solution est donnée par :

$$u(t, x) = g(X(-t, t, x)).$$

On trouve donc :

$$u(t, x) = g(x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t).$$

2) Il est évident sur la formule que $u(t + 2\pi, x) = u(t, x)$, c'est à dire que u est 2π périodique en t.