Examen de Mathématiques Master 1 Mécanique n° 1

Durée 3h.

Le Mardi 9 Janvier 2007.

barême indicatif: 10, 10

Exercice 1. Equation des ondes amorties

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domaine borné. On note par $\partial\Omega$ le bord du domaine Ω. On considère *l'équation des ondes amorties* suivante :

$$(E) \begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta_x u(t,x) + \partial_t u(t,x) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \Omega, \\ u(t,x) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = g(x), \quad \partial_t u(0,x) = h(x) \text{ pour } x \in \Omega, \end{cases}$$

où g, h sont deux fonctions de x à valeurs réelles décrivant les conditions initiales, et où on rappelle que

$$\Delta_x u(t,x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x), \quad \nabla_x u(t,x) = (\partial_{x_1} u(t,x), \dots, \partial_{x_n} u(t,x)).$$

1) Soit $u(t,x)$ une fonction à valeurs réelles de classe C^2 en (t,x) solution de l'équation (E). On pose :

$$I(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_t u(t,x)|^2 d^3x + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_x u(t,x)|^2 d^3x.$$

Calculer $I'(t)$ et en déduire que $I(t)$ est décroissante.

Indication : utiliser la formule de Green.

2) On rappelle le fait suivant vu en cours sur les fonctions propres du problème de Dirichlet : il existe une suite de nombres strictement positifs λ_n, $n = 1, 2, \dots$, tendant vers $+\infty$ et des fonctions réelles $\varphi_n(x)$ définies sur Ω, telles que :

$$\begin{aligned} &i) \ -\Delta_x \varphi_n(x) - \lambda_n \varphi_n(x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega, \\ &ii) \ \varphi_n(x) = 0, \text{pour } x \in \partial\Omega \\ &iii) \ \textstyle\int_\Omega |\varphi_n(x)|^2 d^3x = 1, \\ &iv) \ \textstyle\int_\Omega \varphi_n(x)\varphi_m(x) d^3x = 0, \text{ si } n \neq m. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Déterminer la fonction $f_n(t)$ telle que $u(t,x) = f_n(t)\varphi_n(x)$ soit solution de (E) avec donnée initiale $g = 0$ et $h = \varphi_n$.

3) On suppose maintenant que les données initiales sont de la forme :

$$g(x) \equiv 0, \quad h(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n(x).$$

pour $N \in \mathbf{N}$ fixé et $\alpha_n \in \mathbf{R}$.

En utilisant le point 2) calculer la solution de (E) pour ces données initiales.

4) Montrer que

$$\int_{\Omega} \nabla_x \varphi_n(x).\nabla_x \varphi_m(x) d^3x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m, \\ \lambda_n \text{ si } n = m. \end{cases}$$

En déduire que si $u(t,x)$ est la solution trouvée au point 3), on a :

$$I(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 f_n'(t)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \alpha_n^2 f_n(t)^2,$$

et montrer que :

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = 0.$$

Exercice 2. Equation de Burgers

On s'intéresse dans cet exercice à l' équation de Burgers :

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x \\ u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

1) On rappelle que pour une donnée initiale g, la caractéristique de l'équation de Burgers issue du point $(x,0)$ est la demi-droite dans $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_t$

$$D = \{(x + g(x)t, t), \quad t \geq 0\}.$$

On rappelle aussi qu'il est habituel de considérer les caractéristiques comme des droites dans le plan $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_t$ (la variable x figure en premier quand on considère des caractéristiques).

Soit $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle et $g(x) = -ax + b$ pour $x \in [\alpha, \beta]$ avec $a > 0$. Vérifier que la caractéristique issue du point $x \in I$ est la demi-droite partant de $(x,0)$ et passant par le point $(\frac{b}{a}, \frac{1}{a})$.

2) On considère maintenant une donnée initiale $g(x)$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} 2, \text{ pour } x \leq 0, \\ -x/2 + 2, \text{ pour } 0 < x \leq 2, \\ -x + 3, \text{ pour } 2 < x \leq 3, \\ 0, \text{ pour } 3 < x. \end{cases}$$

Tracer les caractéristiques partant des intervalles $]-\infty, 0]$, $]0,2]$, $]2,3]$ et $]3,+\infty[$ et vérifier que deux caractéristiques de l'équation ne se coupent pas avant le temps $t = 1$.

3) Déterminer par la méthode des caractéristiques la solution $u(t,x)$ de (B) pour $0 \leq t < 1$ et montrer que la fonction

$$g_1(x) := \lim_{t\to 1^-} u(t,x),$$

est donnée par :

$$g_1(x) = \begin{cases} 2 \text{ pour } x \leq 2, \\ 4 - x \text{ pour } 2 < x \leq 3, \\ 0 \text{ pour } 3 < x. \end{cases}$$