Examen de Mathématiques Master 1 Mécanique n° 1

Durée 3h.

Le Mardi 6 Janvier 2009.

Exercice 1.

Rappel : Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné, et

$$D \ni (t,s) \mapsto x(t,s) = (x_1(t,s), x_2(t,s), x_3(t,s)) \in \mathbf{R}^3$$

une paramétrisation d'une surface S. On rappelle qu'au point $x(t,s)$ de S, le vecteur normal unitaire associé à cette paramétrisation est égal à :

$$\vec{\nu}(t,s) = \| \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) \wedge \frac{\partial x}{\partial s}(t,s) \|^{-1} \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) \wedge \frac{\partial x}{\partial s}(t,s).$$

Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la sphère unité :

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) | \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

orientée par la normale extérieure (voir Fig. 1).

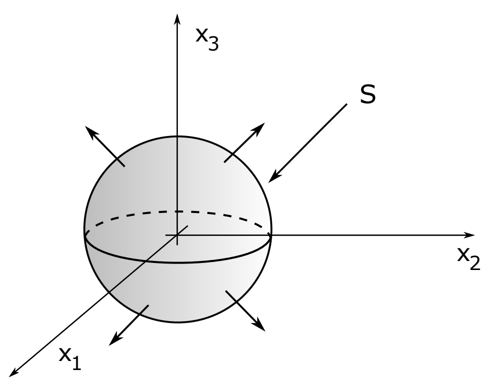

FIGURE 1 – La sphère S

1) Montrer que :

$$[0,\pi] \times [0, 2\pi] \ni (\phi, \theta) \mapsto x(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\,,$$

est une paramétrisation de S compatible avec l'orientation et exprimer l'élément de surface $\mathrm{d}^2 S$ en fonction de $\mathrm{d}t\mathrm{d}s$.

2) Soit $\vec{F}(x)$ le champ de vecteurs :

$$\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_3^3 \end{pmatrix}.$$

Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers S :

$$I = \iint_S \vec{F}(x) \cdot \vec{\nu}(x) d^2 S$$

3) Soit D la boule de centre 0 et de rayon 1. Donner sans calcul la valeur de

$$\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}(x)\mathrm{d}^3x.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 et $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$F(x_1, x_2, x_3) := f((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}).$$

1) Montrer que F est de classe C^2 dans $\mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ et calculer

$$\vec{\nabla} F(x)$$

et

$$\Delta F(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x).$$

2) Soit D le domaine :

$$D = \{((x_1, x_2, x_3)|\ a^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < b^2\}.$$

Calculer directement l'intégrale :

$$I = \iiint_D \Delta F(x)\mathrm{d}^3x.$$

3) Calculer I en appliquant la formule de Green.

Exercice 3. On considère la loi de conservation scalaire :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(t,x) + u^2(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x, \\ u(0,x) = g(x), \end{array} \right.$$

avec :

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ pour } x \leq 0, \\ (4-x)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } 0 < x \leq 2, \\ \sqrt{2} \text{ pour } 2 < x. \end{array} \right.$$

1) Trouver la fonction $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que si $v(t,x) = F(u(t,x))$, la fonction v est solution de :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t v(t,x) + v(t,x)\partial_x v(t,x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x, \\ u(0,x) = h(x), \end{array} \right.$$

pour

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ pour } x \leq 0, \\ 4 - x \text{ pour } 0 < x \leq 2, \\ 2 \text{ pour } 2 < x. \end{array} \right.$$

2) Tracer les courbes caractéristiques pour l'équation (2) et en déduire le temps maximum t_1 tel que l'on puisse résoudre (2) sur $[0, t_1[$ par la méthode des caractéristiques.

3) Donner la solution v de (2) pour $t \in [0, t_1[$ et calculer :

$$v_1(x) = \lim_{t \to t_1^-} v(t,x).$$

4) Prolonger la solution $v(t,x)$ de (2) pour $t \geq t_1$ comme une solution discontinue. (On cherchera la courbe de discontinuité avec la condition de Rankine-Hugoniot).

5) Trouver la solution $u(t,x)$ de (1) correspondante et montrer qu'elle vérifie la condition d'entropie.

Exercice 4. On considère la loi de conservation scalaire :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, \ \text{dans } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x, \\ u(0,x) = g(x), \end{cases}$$

où :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leq 0, \\ 1 + x^2 \text{ pour } 0 < x. \end{cases}$$

1) Résoudre l'équation (1) dans la région $x < 0$ par la méthode des caractéristiques.

2) Résoudre l'équation (1) dans la région $x > t$ par la méthode des caractéristiques.

3) Compléter la solution dans la région $0 < x < t$ sous la forme d'une onde de raréfaction, et donner la solution $u(t,x)$ dans tout (t,x) avec $t > 0$.