Examen de Mathématiques Master 1 Mécanique n° 1

Durée 3h.

Le Mardi 5 Janvier 2010.

barême indicatif: 4, 6, 4, 6

Question de cours.

1) On considère l'équation de transport :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \vec{F}(t,x) \cdot \vec{\nabla}_x u(t,x) = 0, \ \forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = f(x), \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Donner la définition des courbes caractéristiques de cette équation et la formule donnant la solution u en fonction de la donnée initiale f.

2) On considère la loi de conservation :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + F'(u)\partial_x u(t,x) = 0, \ \forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Expliquer ce qu'est une solution faible discontinue à travers une courbe de choc, rappeler la condition de Rankine-Hugoniot et la condition d'entropie.

Exercice 1. Equation des ondes à données initiales radiales.

On rappelle la définition du Laplacien :

$$\Delta_x f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x).$$

On veut résoudre l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$:

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0, \ \forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^4, \\ u(0,x) = f(x), \ \forall\ x \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = 0, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

dans le cas où la fonction f est *radiale* c'est à dire que :

$$f(x) = F(|x|), \text{ pour } |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

et $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction donnée.

On va chercher la solution sous la forme :

$$u(t,x) = U(t,|x|),$$

pour une fonction :

$$U : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ (t,r) \mapsto U(t,r). \end{array}$$

1) Montrer que $u(t,x)$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $U(t,r)$ est solution de l'équation :

$$(E') \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,r) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} U(t,r) - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} U(t,r) = 0, \ \forall\ (t,r) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, \\ U(0,r) = F(r), \ \forall\ r \in [0,+\infty[, \\ \frac{\partial}{\partial t} U(0,r) = 0, \ \forall\ r \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

Indication : commencer par exprimer $\Delta_x u$ en fonction des dérivées partielles de U par rapport à r.

2) On pose $V(t,r) := rU(t,r)$. Montrer que $U(t,r)$ vérifie (E') si et seulement si $V(t,r)$ vérifie l'équation des ondes sur la demi-droite avec condition de Dirichlet en 0 :

$$(E'')\ \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}V(t,r) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}V(t,r) = 0,\ \forall\ (t,r) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, \\ V(0,r) = rF(r),\ \forall\ r \in [0,+\infty[, \\ \frac{\partial}{\partial t}V(0,r) = 0,\ \forall\ r \in [0,+\infty[, \\ V(t,0) = 0,\ \forall\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3) On rappelle que la solution de (E'') est donnée par :

$$V(t,r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((r+t)F(r+t) + (r-t)F(r-t)\right),\ \text{si } 0 \le t \le r, \\ \frac{1}{2}\left((r+t)F(r+t) - (t-r)F(t-r)\right),\ \text{si } 0 \le r \le t. \end{cases}$$

En déduire l'expression de la solution de (E).

4) On suppose que la donnée initiale f est égale à :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \le 1, \\ 0 \text{ si } |x| > 1. \end{cases}$$

Montrer que la solution $u(t,x)$ de (E) vérifie :

$$u(t,x) = 0 \text{ si } t \ge 0 \text{ et } |x| > t+1,\ \text{ ou si } t \ge 1 \text{ et } |x| < t-1.$$

Exercice 2.

1) Résoudre l'équation de transport dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + xt\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

(Donner la formule donnant la solution u en fonction de la donnée initiale f).

2) Calculer la limite :

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x),$$

en supposant que la fonction f est continue.

3) On veut maintenant résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + xt\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = h(x), \\ u(0,x) = f(x), \end{cases}$$

pour une autre fonction h. Donner la formule donnant la solution en fonction de f et h.

Exercice 3. On veut résoudre l'équation de Burgers :

$$(B)\ \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = g(x), \end{cases}$$

pour la donnée initiale :

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq -1, \\ 0 \text{ si } -1 < x \leq 0, \\ 2 \text{ si } 0 < x. \end{cases}$$

1) Tracer les courbes caractéristiques associées à cette donnée initiale.

2) Résoudre d'abord l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_d(t,x) + u_d(t,x) \frac{\partial}{\partial x} u_d(t,x) = 0, \\ u_d(0,x) = h(x), \end{cases}$$

où

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ 2 \text{ si } 0 < x. \end{cases}$$

Indication : chercher la solution sous la forme d'une onde de raréfaction.

3) Chercher la solution de (B) sous la forme d'une onde de choc :

$$u(t,x) = \begin{cases} u(t,x) = 1, \text{si } x < s(t), \\ u(t,x) = u_d(t,x) \text{ si } x > s(t), \end{cases}$$

où $u_d(t,x)$ est la solution trouvée au point 1), et la courbe de choc $x = s(t)$ est déterminée en utilisant la condition de Rankine-Hugoniot.

Indication : l'équation déterminant la fonction $s(t)$ sera différente pour $0 \leq t \leq 2$ et pour $t \geq 2$.

4) Vérifier que la solution obtenue satisfait à la condition d'entropie.