Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)\cos(x_1^3 + 2\sin x_2).$$

Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice $n \times n$ à coefficients réels.

1) On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle Ax, x\rangle. \end{array}$$

Calculer ∇f et Δf. 2) Soit

$$g : \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 \mathrm{e}^{\langle Ax, x\rangle^3}. \end{array}$$

Calculer ∇g.

Exercice 3. Calculer l'intégrale

$$\int_{B(0,R)} \mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2.$$

En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

Exercice 4. 1) Pour $y \in \mathbf{R}^3$ et $R > 0$, on définit la fonction :

$$F(y) = \int_{B(0,R)} \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2\right)^{-1/2} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Montrer que si $R : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ est une rotation autour de l'origine alors $F(Ry) = F(y)$.

2) Calculer $F(y)$ si $y = (0, 0, a)$ avec $a \geq 0$. (On distinguera les cas $a > R$, $a < R$ et $a = R$).

3) En déduire une expression pour $F(y)$. Quelle est l'interprétation physique de $F(y)$?

4) Calculer ∇F.