Université de Paris XI **Master Mécanique**
Mathématiques **1er semestre 2008/2009**

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soient $a, b > 0$ et

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma |xy| dl.$$

Exercice 2. On considère dans $\mathbf{R}^3$ le demi cône T de sommet 0 et d'ouverture α, donné par l'équation :

$$(\tan\alpha)z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \text{ pour } \alpha \in]0, \pi/2[.$$

et la sphère C de centre 0 de rayon R. L'intersection de T et C définit une surface S.

1) En utilisant les coordonnées cylindriques, donner une paramétrisation de S. En déduire l'expression du vecteur normal à S associé et de l'élément d'aire dS.

2) Calculer l'aire de S.

Exercice 3. Soit u une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$. On pose :

$$v_a(r,\theta) = u(a_1 + r\cos\theta, a_2 + r\sin\theta),$$

pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$.

1) Calculer les dérivées partielles premières de v_a en fonction de celles de u.

2) On suppose maintenant que $\Delta u = 0$. En utilisant la formule de Green, montrer que :

$$\int_{\partial B(a,R)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dl = 0, \ \forall a \in \mathbf{R}^2, \ \forall R > 0.$$

3) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} v_a(r,\theta) d\theta = 2\pi u(a),$$

puis que :

$$\int_{B(a,R)} u(x,y) dx dy = \pi R^2 u(a).$$

4) Montrer que si u est une fonction bornée sur $\mathbf{R}^2$ alors u est constante.

5) Généraliser ce résultat au cas de la dimension 3.

Exercice 4. On dit qu'une fonction v de classe C^2 est *sous harmonique* sur le domaine $U \subset \mathbf{R}^2$ si :

$$-\Delta v(x) \leq 0, \ \forall x \in U.$$

1) En utilisant la formule de Green montrer que pour tout $x \in U$, $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset U$ on a :

$$\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial v}{\partial \nu} dl \geq 0.$$

2) En déduire que

$$v(x) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} v(y) d^2 y.$$

3) En déduire que

$$\max_{\overline{U}} u(x) = \max_{\partial U} u(x).$$

4) Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction régulière et convexe (c'est à dire que $\phi" \geq 0$). Montrer que si u est harmonique dans U, $\phi(u)$ est sous harmonique dans U.

5) Sous les mêmes hypothèses, montrer que la fonction $v = |\nabla_x u(x)|^2$ est sous harmonique.