Université de Paris XI
Mathématiques

Master Mécanique
1er semestre 2008/2009

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Résoudre par la méthode des caractéristiques les équations :

$$\begin{cases} \partial_t u + y\partial_x u + x\partial_y u = 0, \\ u(0,x,y) = g(x,y) \in C^1(\mathbf{R}^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u + (t+x)\partial_x u - tu = 0, \\ u(0,x) = g(x) \in C^1(\mathbf{R}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u + 3t^2\partial_x u - 2tu = 0, \\ u(0,x) = g(x) \in C^1(\mathbf{R}). \end{cases}$$

2) On considère l'équation

$$(E) \begin{cases} \partial_t u + x^2\partial_x u = 0, \\ u(0,x) = g(x) \in C^1(\mathbf{R}). \end{cases}$$

1) Quelles sont les caractéristiques de l'équation ?

2) Dans quel domaine de $\mathbf{R}^2$ la méthode des caractéristiques donne t'elle une solution unique ?

3) Donner un exemple de fonction g pour laquelle *(E)* n'a pas de solution dans $\mathbf{R}^2$ et un exemple où *(E)* a une infinité de solutions dans $\mathbf{R}^2$. Existe t'il une fonction g pour laquelle *(E)* a une unique solution ?

4) Répondre aux mêmes questions pour l'équation :

$$\partial_t u + (1+x^2)\partial_x u = 0.$$

Exercice 2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} u(t,x) + 3\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = 1, \text{ dans } \mathbf{R}^2.$$

Indication : considérer la fonction $v = \partial_x u$.

Exercice 3. 1) Résoudre l'équation de transport :

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + tx\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x \\ u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

2) On suppose que la fonction g est continue. Quelle est la limite de $u(t,x)$ pour $x \in \mathbf{R}$ fixé quand t tend vers $+\infty$?