Université de Paris XI
Mathématiques

Master Mécanique
1er semestre 2008/2009

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u\partial_x u = u, \\ u(0,x) = 2x, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u\partial_x u = t, \\ u(0,x) = x. \end{array} \right.$$

Exercice 2. Trouver une solution faible dans $\mathbf{R}^2$ de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u\partial_x u = u, \\ u(0,x) = x \text{ si } x \geq 0,\ u(0,x) = -1 \text{ si } x < 0. \end{array} \right.$$

Exercice 3. Trouver la solution vérifiant les conditions d'entropie de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u^2\partial_x u = 0, \\ u(0,x) = 0 \text{ si } x \leq 0,\ u(0,x) = 1 \text{ si } 0 < x \leq 1,\ u(0,x) = 0 \text{ si } 1 < x. \end{array} \right.$$

Exercice 4. Trouver la solution vérifiant les conditions d'entropie de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u\partial_x u = 0, \\ u(0,x) = 1 \text{ si } x \leq -1,\ u(0,x) = 0 \text{ si } -1 < x \leq 0, \\ u(0,x) = 2 \text{ si } 0 < x \leq 1,\ u(0,x) = 0 \text{ si } 1 \leq x. \end{array} \right.$$

Exercice 5. On considère la fonction :

$$u(t,x) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3}(t + \sqrt{3x + t^2}),\ \text{pour } 4x + t^2 > 0, \\ 0 \text{ pour } 4x + t^2 < 0. \end{array} \right.$$

1) Tracer la courbe d'équation $4x + t^2 = 0$.

2) Montrer que la fonction u est une solution vérifiant les conditions d'entropie de l'équation :

$$\partial_t u + \partial_x(\frac{u^2}{2}) = 0.$$

Exercice 6. Soit $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction régulière avec $F(0) = 0$, et u une fonction continue solution de la loi de conservation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0,\ \text{dans } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x, \\ u(0,x) = g(x). \end{array} \right.$$

On suppose que pour tout t fixé le support en x de la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est borné. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx, \text{ pour tout } t > 0.$$

Exercice 7. Loi de conservation avec terme de viscosité.

On considère dans cet exercice l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(E)\ \partial_t u + u(t,x)p_x u(t,x) - a\partial_x^2 u = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x,$$

pour une constante $a > 0$. Le terme $-a\partial_x^2 u$ est appelé *terme de viscosité.*

1) Montrer que la fonction $u(t,x) = v(x - \sigma t)$ est solution de *(E)* si et seulement si la fonction v vérifie :

$$-\sigma v' + vv' - av" = 0.$$

2) On fixe deux nombres u_1 et u_2 avec $u_1 < u_2$. 3) On suppose que σ et b sont choisis comme dans le point 2). Déterminer les primitives sur l'intervalle $]u_1, u_2[$ de la fonction

$$s \mapsto \frac{2a}{(s-u_1)(s-u_2)},$$

et tracer leurs graphes.

indication : on pourra décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.

3) Soit $f :]a,b[\to]\alpha,\beta[$ une fonction régulière et bijective. On note $f^{-1} :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ la fonction réciproque de f. Quelle est l'expression de $(f^{-1})'$ et de $(f \circ g)'$?

4) Avec les notations de 4), on pose $v = f^{-1}$. Calculer v' et $v"$.

5) On suppose que f est une des primitives trouvées au point 3). Montrer que si $v = f^{-1}$ alors $u(t,x) = v(x - \sigma t)$ est solution de *(E)* si $\sigma = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.

Indication : utiliser les points 1) et 4).

6) Quelles sont les limites de $u(t,x)$ quand x tend vers $\pm\infty$?

7) Montrer sans calculs que si

$$v_a(x) = \frac{u_2 \mathrm{e}^{-(u_2-u_1)x/a} + u_1 \mathrm{e}^{(u_2-u_1)x/a}}{\mathrm{e}^{-(u_2-u_1)x/a} + \mathrm{e}^{(u_2-u_1)x/a}},$$

alors $u_a(t,x) = v(x - \frac{1}{2}(u_1 + u_2)t)$ est solution de *(E)*.

8) Déterminer la limite $u_0(t,x)$ de $u_a(t,x)$ quand a tend vers 0 ? De quelle équation la fonction u_0 est elle solution ?