Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Montrer que si :

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt,$$

on a

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Exercice 2.

1) Chercher les nombres réels λ tels que l'équation différentielle :

$$-u" - \lambda u = 0, u(0) = u(\pi) = 0$$

possède une solution non nulle. On rappelle que ces nombres λ sont appelés les valeurs propres du Laplacien de Dirichlet sur $[0, \pi]$, noté $-\Delta_D$.

2) Donner pour chaque valeur propre une fonction propre u telle que $\|u\|_{L^2} = 1$.

3) Montrer sans calcul que si u et v sont deux fonctions propres pour deux valeurs propres différentes alors

$$\int_0^\pi u(x)v(x)dx = 0.$$

4) Pour $a_1, \dots a_n \in \mathbf{R}$ calculer directement la valeur de

$$\|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots a_n \sin nx\|_{L^2}^2.$$

5) Décomposer la fonction 1 sur la base des fonctions $\sin nx$.

6) En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

7) En considérant maintenant la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x \text{ si } \pi/2 < x \leq \pi, \end{cases}$$

calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 3. 1) Pour $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$ on pose $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Exprimer le Laplacien de u en fonction de dérivées partielles de v.

2) En déduire quelles sont les fonctions harmoniques " à variables séparées" c'est à dire de la forme $v(r, \theta) = f(r)F(\theta)$.

Exercice 4. Une fonction $u : U \to \mathbf{C}$ où U est un domaine de $\mathbf{R}^2$ est dite *holomorphe dans U* si elle admet des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}u$, $\frac{\partial}{\partial y}u$ et si l'équation suivante est vérifée :

$$(CR)\ \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0,\ (x,y) \in U.$$

1) On pose $u(x,y) = u_1(x,y) + \mathrm{i}u_2(x,y)$, où u_1 et u_2 sont les parties réelles et imaginaires de u. Récrire l'équation (CR) comme un système d'équations aux dérivées partielles pour le couple u_1, u_2.

2) Montrer que u_1 et u_2 sont *harmoniques* dans U, c'est à dire que :

$$\Delta u_1(x,y) = \Delta u_2(x,y) = 0,\ (x,y) \in U.$$

3) Montrer que la fonction

$$F(x,y) = u_1^2(x,y) + u_2^2(x,y)$$

est *sous harmonique* dans U, à dire que :

$$\Delta F(x,y) \geq 0,\ (x,y) \in U.$$

4) On rappelle que si $v : U \to \mathbf{R}$ est sous harmonique dans U alors elle vérifie le *principe du maximum* :

$$\max_{(x,y\in U)} v(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial U} v(x,y),$$

c'est à dire que le maximum d'une fonction sous harmonique dans U est atteint sur le bord de U.

Déduire de 3) que si u est holomorphe dans U, la maximum de la fonction $|u(x,y)|$ est atteint sur le bord de U.

Exercice 5. Soit $u \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0,\ \text{dans } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x.$$

1) Montrer que $u_\lambda(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ vérifie aussi l'équation de la chaleur pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

2) En déduire que $v(t,x) = x\partial_x u(t,x) + 2tu(t,x)$ vérifie l'équation de la chaleur.

Exercice 6.

1) Soit $v \in C^\infty(\mathbf{R})$ et $u(t,x) = v(\frac{x^2}{t})$. Montrer que u vérifie l'équation de la chaleur si et seulement si

$$(*)\ 4zv"(z) + (2+z)v'(z) = 0,\ \text{dans } z > 0.$$

2) Montrer que la solution générale de $(*)$ est :

$$v(z) = c\int_0^z \mathrm{e}^{-s/4} s^{-\frac{1}{2}} ds + d,$$

pour des constantes c, d arbitraires.

Exercice 7. On fixe une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ avec $g(0) = 0$. Montrer que la fonction :

$$u(t,x) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s) ds,$$

est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \text{ dans }]0,+\infty[\times[0,+\infty[, \\ u(0,x) = 0,\ x \in \mathbf{R}^+, \\ u(0,t) = g,\ t \in \mathbf{R}^+. \end{cases}$$

Indication : poser $v(t,x) = u(t,x) - g(t)$ et étendre v dans $x < 0$ en une fonction impaire en x.

Exercice 8. On rappelle les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{E} = \mathrm{rot}\vec{B}, \\ \partial_t \vec{B} = -\mathrm{rot}\vec{E}, \\ \mathrm{div}\vec{E} = \mathrm{div}\vec{B} = 0. \end{cases}$$

Montrer que si $(\vec{E}(t,x), \vec{B}(t,x))$ vérifie les équations de Maxwell, alors on a :

$$\partial_t^2 \vec{E} - \Delta_x \vec{E} = 0,$$
$$\partial_t^2 \vec{B} - \Delta_x \vec{B} = 0.$$