Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Soit $f \in C^2(\mathbf{R})$ et $g \in C^1(\mathbf{R})$ deux fonctions à support compact et $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$ l'unique solution de l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, \\ u(0,x) = f(x), \\ \partial_t u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

On considère l'énergie cinétique :

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} |\partial_t u(t,x)|^2 dx,$$

l'énergie potentielle :

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} |\partial_x u(t,x)|^2 dx,$$

etl'énergie totale :

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t).$$

1) Montrer que $E(t)$ est une fonction constante.

2) Déterminer un $T > 0$ tel que pour $t > T$ on ait :

$$E_1(t) = E_2(t).$$

Exercice 2. Soit $r > 0$ une constante. On considère l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -r\partial_t u, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, u(0,x) = \phi(x), \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x), \end{cases}$$

où ϕ, ψ sont deux fonctions de classe C^2 sur $[0,\pi]$ s'annulant en 0 et π.

Trouver le développement en série de sinus de u pour :

$$a)\ r \in]0,2[,$$
$$b)\ r \in]2,4[.$$

Exercice 3. On rappelle la formule de Kirchoff, qui donne la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes en dimension 3 :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, \text{ dans } \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3, \\ u(0,x) = g(x), \ \partial_t u(0,x) = h(x) \text{ dans } \mathbf{R}_x^3 : \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{|\partial B(x,t)|}\int_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + \nabla g(y).(y-x)dS(y).$$

Montrer que si g et h sont à support compact, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|u(t,x)| \leq Ct^{-1}, \text{ pour tout } t \geq 1.$$

Exercice 4. Equation des ondes avec terme de source

On considère l'équation des cordes vibrantes

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = g(x - ct), \\ u(0,x) = 0, \ \partial_t u(0,x) = 0, \end{array} \right.$$

qui décrit l'évolution d'une corde vibrante initialement au repos et soumise à une force extérieure qui se déplace le long de la corde à la vitesse c. On supposera que la fonction g est une fonction C^∞ à support compact.

On rappelle les résultats suivants sur la transformation de Fourier :

On pose

$$\mathcal{F}u(k) = \hat{u}(k) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} u(x) dx,$$

la transformée de Fourier de la fonction u. On a alors :

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \hat{u}(k) dk.$$

Si f, g sont deux fonctions, on note par $f * g$ la convolution de f et g, définie par :

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) g(x-y) dy,$$

et on a :

$$\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k), \ \hat{\partial_x} u(k) = \mathrm{i}k\hat{u}(k).$$

D'autre part on a les identités suivantes :

$$\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{k^2}) = -\frac{1}{2}|x|, \ \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{k}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{sign}(x),$$

où

$$\mathrm{sign}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ pour } x \geq 0, \\ -1 \text{ pour } x < 0. \end{array} \right.$$

1) On note par $\hat{u}(t,k)$ la transformée de Fourier dans la variable x de la fonction $u(t,x)$. Vérifier que l'équation (E) est équivalente à :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \hat{u}(t,k) + k^2 \hat{u}(t,k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ckt} \hat{g}(k), \\ \hat{u}(0,k) = \partial_t \widehat{u}(t,k) = 0. \end{array} \right.$$

2) Trouver une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$f"(t) + k^2 f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ckt}.$$

Indication : si $c = 1$ on pourra checher $f(t)$ sous la forme $f(t) = \alpha t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}$.

3) En déduire la solution de l'équation :

$$\begin{array}{l} f"(t) + k^2 f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ckt}, \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{array}$$

4) En appliquant 3), résoudre l'équation (2).

5) On pose

$$h(x) = -\frac{1}{2}|x| * g(x),\ \ m(x) = -\frac{1}{4}\mathrm{sign}(x) * g(x),$$

où on a utilisé la notation $f(x) * g(x)$ pour la fonction égale au le produit de convolution $f * g$.

Montrer que si $c \neq 1$, la solution de (1) est donnée par :

$$u(t,x) = \frac{1}{1-c^2}h(x-ct) - \frac{1}{2(1+c)}h(x+t) - \frac{1}{2(1-c)}h(x-t),$$

si $c \neq 1$ et par :

$$u(t,x) = tm(x-t) - \frac{1}{4}h(x-t) + \frac{1}{4}h(x+t),$$

si $c = 1$.