# 1 Lois de conservation scalaires

On considère la loi de conservation scalaire :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x, \\ u|_{t=0} = g, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où la donnée initiale $g$ est une fonction sur $\mathbb{R}$. Formellement l'équation (1.1) se réécrit comme :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u + F'(u)\partial_x u = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x, \\ u|_{t=0} = g. \end{array}\right. \tag{1.2}$$

La fonction $u(t,x)$ représente par exemple la densité du fluide au point $(t,x)$, la vitesse du fluide $F'(u)$ dépend de la densité.

L'équation (1.2) est une équation de transport *non-linéaire*. Il en résulte que même si la donnée initiale $g$ est une fonction continue ou régulière, la méthode des caractéristiques ne marche pas toujours pour des temps arbitrairement grands.

## 1.1 Rappels sur la méthode des caractéristiques

On suppose que la donnée initiale $g$ est *continue*. Si ce n'est pas le cas, la solution $u(t,x)$ sera elle aussi discontinue (typiquement à travers une surface dans $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x$), et il faudra utiliser la notion de *solution faible* vue plus bas.

Pour l'équation (1.2), qui n'a pas de terme de source, l'équation des courbes caractéristiques est :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = 1, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}(s) = F'(z(s)), \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}(s) = 0, \end{array}\right.$$

avec conditions initiales $t(0) = 0$, $x(0) = y$, $z(0) = g(y)$. La solution est évidemment :

$$t(s) = s, \; x(s) = y + sF'(g(y)), \; z(s) = g(y).$$

On écrit

$$x(s) = x(s,y), \; z(s) = z(s,y),$$

pour indiquer la dépendance dans le point initial $y$.

Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x$. Pour trouver $u(t,x)$ par la méthode des caractéristiques :

1) on résout en $y$ l'équation :

$$x(t,y) = x, \text{ soit } y + tF'(g(y)) = x. \tag{1.3}$$

On note la solution $y := y(t,x)$.

2) on a alors :

$$u(t,x) = g(y(t,x)).$$

Pour $x$ fixé, l'équation (1.3) possède une solution $y$ *unique* si le paramètre $t$ est assez petit.

**Conclusion : pour une donnée initiale $g$ continue, la méthode des caractéristiques marche pour des temps assez petits**.

Si le temps $t$ devient trop grand, l'équation (1.3) peut avoir plusieurs solutions (ou aucune). La méthode des caractéristiques ne marche plus, il faut utiliser les solutions faibles (solutions discontinues).

## 1.2 Solutions faibles

On cherche dans quel sens une fonction $u(t,x)$ *discontinue* à travers une surface $S$ peut être considérée comme une solution de (1.1). La réponse est la suivante :

1) soit $C$ une courbe dans $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x$, donnée par l'équation :

$$C = \{(t,x) |\ x = s(t),\ t \geq 0\}.$$

La fonction $s'(t)$ représente la *vitesse* de la courbe (au temps $t$), ou encore la vitesse du 'point de discontinuité' $s(t)$.

La courbe $C$ partage l'espace-temps en deux régions :

$$C_{\rm g} = \{(t,x) |\ x < s(t),\ t \geq 0\},$$

$$C_{\rm d} = \{(t,x) |\ x > s(t),\ t \geq 0\},$$

les régions *à gauche* et *à droite* de $C$.

2) On se donne deux fonctions :

$$u_{\rm g}(t,x),\ u_{\rm d}(t,x),$$

solutions *continues* dans $C_{\rm g}$ (resp. $C_{\rm d}$) de :

$$\partial_t u_{\rm g/d} + F'(u_{\rm g/d})\partial_x u_{\rm g/d} = 0.$$

Ces deux solutions sont à chercher par la méthode des caractétistiques. Typiquement $u_{\rm g/d}$ sont des restrictions à $C_{\rm g/d}$ de solutions définies par exemple dans $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x$.

3) on fixe la fonction :

$$u(t,x) := \left\{ \begin{array}{l} u_{\rm g}(t,x) \text{ si } (t,x) \in C_{\rm g}, \\ u_{\rm d}(t,x) \text{ si } (t,x) \in C_{\rm d}. \end{array} \right.$$

Noter que la fonction $u(t,x)$ n'est pas définie sur $C$, mais celà n'a pas d'importance.

On peut définir le *saut* de $u$ à travers $C$ :

$$[u] = u_{\mathrm{g}} - u_{\mathrm{d}} \text{ restreint à } C,$$

(en d'autres termes $[u]$ en un point $(t, s(t))$ de $C$ est la différence entre les limites à gauche et à droite de $u$ sur $C$). L'expression $[u]$ est donc une fonction sur la courbe $C$.

On définit de même :

$$[F(u)] = F(u_{\mathrm{g}}) - F(u_{\mathrm{d}}) \text{ restreint à } C.$$

La fonction $u$ est alors une *solution faible* de (1.1) si la condition de *Rankine-Hugoniot* est satisfaite :

$$(RH)\ [F(u)] = \sigma[u], \text{ sur } C, \tag{1.4}$$

où $\sigma = s'(t)$ est la vitesse de la courbe au point $(t, s(t))$ de $C$ (c'est donc une fonction sur $C$).

La condition de Rankine-Hugoniot sert à déterminer la courbe $C$.

# 2 Chocs et ondes de raréfaction pour Burgers

On considère l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\frac{1}{2}u^2) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x, \\ u|_{t=0} = g, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec la donnée initiale $g$ :

$$g(x) = \begin{cases} a_{\mathrm{g}}, \text{ pour } x < 0, \\ a_{\mathrm{d}}, \text{ pour } 0 \leq x. \end{cases}$$

La valeur de $g$ en $x = 0$ n'a pas d'importance. Notons que si $a_{\mathrm{g}} = a_{\mathrm{d}} =: a$, la donnée initiale est continue, la solution donnée par la méthode des caractéristiques est :

$$u(t,x) \equiv a.$$

## 2.1 Chocs

On suppose que

$$a_{\mathrm{g}} > a_{\mathrm{d}}.$$

Les particules à gauche ont la vitesse $F'(a_{\mathrm{g}}) = a_{\mathrm{g}}$, elles vont plus vite que les particules à droite dont la vitesse est $F'(a_{\mathrm{d}}) = a_{\mathrm{d}}$. Les caractéristiques se coupent

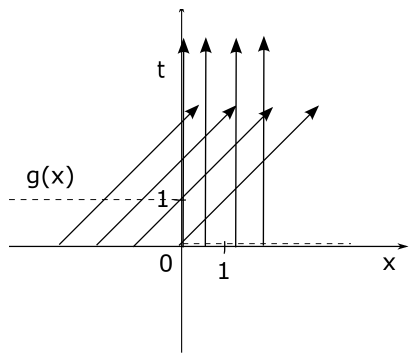


FIGURE 1 –

pour des temps $t$ arbitraitement petits (voif Fig. 1). Il y a formation d'un *choc*, c'est à dire qu'on trouve une solution discontinue. En appliquant la méthode précédente, on trouve :

$$u_{\mathrm{g}}(t,x) \equiv a_{\mathrm{g}}, \; u_{\mathrm{d}}(t,x) \equiv a_{\mathrm{d}},$$

et la condition de Rankine-Hugoniot donne :

$$\frac{1}{2}(a_{\mathrm{g}}^2 - a_{\mathrm{d}}^2) = \sigma(a_{\mathrm{g}} - a_{\mathrm{d}}),$$

c'est à dire

$$\sigma = s'(t) = \frac{1}{2}(a_{\mathrm{g}} + a_{\mathrm{d}}).$$

La courbe de discontinuité part à $t = 0$ du point de discontinuuité $x = 0$, on a donc $s(0) = 0$ et

$$s(t) = \frac{1}{2}(a_{\mathrm{g}} + a_{\mathrm{d}})t.$$

## 2.2 Ondes de raréfaction

On suppose que

$$a_{\mathrm{g}} < a_{\mathrm{d}}.$$

Les particules à gauche ont la vitesse $F'(a_{\mathrm{g}}) = a_{\mathrm{g}}$, elles vont moins vite que les particules à droite dont la vitesse est $F'(a_{\mathrm{d}}) = a_{\mathrm{d}}$. Il se forme dans le fluide une région :

$$\{(t,x) | \; a_{\mathrm{g}}t < x < a_{\mathrm{d}}t\},$$

où aucune caractéristique ne passe (voir Fig. 2). Dans cette région on ne peut donc pas déterminer la solution par la méthode des caractéristiques. La solution trouvée

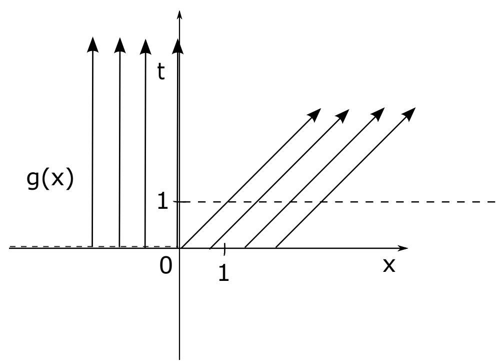


FIGURE 2 –

dans la sous Sect. 2.1 est toujours une solution possible. On l'appelle un *choc non physique.*

Il existe une autre solution, qui est *continue*, appelée une *onde de raréfaction* :

$$u(t,x) = \begin{cases} a_{\mathrm{g}} \text{ pour } x < a_{\mathrm{g}}t, \\ \frac{x}{t} \text{ pour } < a_{\mathrm{g}}t \leq x < a_{\mathrm{d}}t, \\ a_{\mathrm{d}} \text{ pour } a_{\mathrm{d}}t \leq x. \end{cases}$$

On voit donc que les solutions faibles ne sont pas uniques. Pour choisir les bonnes solutions, on impose la *condition d'entropie* :

$$(E)\ F'(u_{\mathrm{g}}) > \sigma > F'(u_{\mathrm{d}}) \text{ sur } C, \tag{2.2}$$

c'est à dire que les particules à gauche et à droite rentrent dans la courbe de choc $C$. Le choc non-physique vu plus haut ne vérifie pas la condition d'entropie, l'onde de raréfaction étant continue ne pose pas de problème.

## 2.3 Apparition de chocs

On considère toujours Burgers, avec la donnée initiale :

$$g(x) = \begin{cases} a_{\mathrm{g}} \text{ pour } 0 < x, \\ a_{\mathrm{g}} + x(a_{\mathrm{d}} - a_{\mathrm{g}}), \text{ pour } 0 \leq x < 1, \\ a_{\mathrm{d}} \text{ pour } 1 \leq x, \end{cases}$$

On suppose $a_{\mathrm{g}} > a_{\mathrm{d}}$. La donnée initiale est continue, on peut résoudre pour $t$ petit par la méthode des cractéristiques. Toutes les caractéristiques partant d'un point

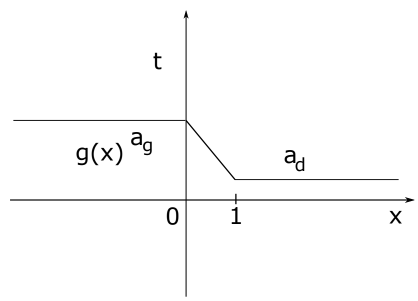


FIGURE 3 –

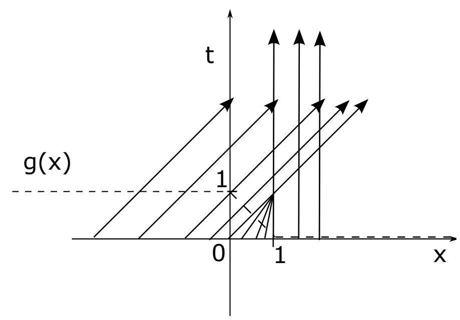


FIGURE 4 –

$y \in [0,1]$ se coupent au temps $t = (a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})^{-1}$ au point $x = 1$ (voir Fig. 4). Pour $0 \leq t < (a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})^{-1}$, la solution est donnée par :

$$u(t,x) = \begin{cases} a_\mathrm{g} \text{ pour } x < a_\mathrm{g} t, \\ \frac{a_\mathrm{g} - (a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})x}{1 - t(a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})} \text{ pour } < a_\mathrm{g} t \leq x \leq 1 + a_\mathrm{d} t, \\ a_\mathrm{d} \text{ pour } 1 + a_\mathrm{d} t \leq x. \end{cases}$$

Si on calcule la fonction

$$u_1(x) = \lim_{t \to (a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})^{-1}} u(t,x),$$

on trouve :

$$u_1(x) = \begin{cases} a_\mathrm{g} \text{ pour } x < a_\mathrm{g}(a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})^{-1}, \\ a_\mathrm{d} \text{ pour } a_\mathrm{g}(a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})^{-1} \leq x. \end{cases}$$

C'est une fonction discontinue, qui correspond à l'apparition d'un choc. A partir du temps $t = (a_\mathrm{g} - a_\mathrm{d})^{-1}$, il faut trouver $u(t,x)$ comme solution discontinue. On obtient comme dans la sous Sect. 2.1 :

$$u(t,x) = \begin{cases} a_{\mathrm{g}} \text{ pour } x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a_{\mathrm{g}} + a_{\mathrm{d}})t, \ (a_{\mathrm{g}} - a_{\mathrm{d}})^{-1} \leq t, \\ a_{\mathrm{d}} \text{ pour } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a_{\mathrm{g}} + a_{\mathrm{d}})t < x, \ (a_{\mathrm{g}} - a_{\mathrm{d}})^{-1} \leq t. \end{cases}$$

Cette solution vérifie bien la condition d'entropie.

# 3 Le cas général

On considère maintenant le cas général :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x, \\ u|_{t=0} = g. \end{cases} \tag{3.1}$$

On va supposer pour simplifier que la fonction $F$ est *strictement convexe*, c'est à dire que $F"(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda$ ou de manière équivalente que $F'$ est strictement croissante.

## 3.1 Chocs

On cherche à résoudre (3.1) avec la condition initiale :

$$g(x) = \begin{cases} a_{\mathrm{g}}, \text{ pour } x < 0, \\ a_{\mathrm{d}}, \text{ pour } 0 \leq x, \end{cases}$$

et on suppose que :

$$a_{\mathrm{g}} > a_{\mathrm{d}}.$$

Comme la vitesse $F'(u)$ est strictement croissante, les particules à gauche vont plus vite que celles à droite, on a apparition d'un choc. Les solutions $u_{\mathrm{g/d}}$ sont :

$$u_{\mathrm{g/d}}(t,x) \equiv a_{\mathrm{g/d}}.$$

La condition de Rankine-Hugoniot donne :

$$F(a_{\mathrm{g}}) - F(a_{\mathrm{d}}) = s'(t)(a_{\mathrm{g}} - a_{\mathrm{d}}), \ s(0) = 0,$$

et donc :

$$s(t) = t(F(a_{\mathrm{g}}) - F(a_{\mathrm{d}}))(a_{\mathrm{g}} - a_{\mathrm{d}})^{-1}.$$

On obtient la solution :

$$u(t,x) = \begin{cases} a_{\mathrm{g}} \text{ pour } x < t(F(a_{\mathrm{g}}) - F(a_{\mathrm{d}}))(a_{\mathrm{g}} - a_{\mathrm{d}})^{-1}, \\ a_{\mathrm{d}} \text{ pour } t(F(a_{\mathrm{g}}) - F(a_{\mathrm{d}}))(a_{\mathrm{g}} - a_{\mathrm{d}})^{-1} < x. \end{cases}$$

Pour toute fonction $F$ strictement convexe, on a :

$$F(a) > \frac{F(a) - F(b)}{a - b} > F'(b), \text{ si } a > b.$$

En effet par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\frac{F(a) - F(b)}{a - b} = F'(c), \text{pour un } c \in ]a, b[$$

ce qui entraine le résultat comme $F'$ est strictement croissante.

La condition d'entropie est donc satisfaite.

## 3.2 Ondes de raréfaction

On suppose maintenant que

$$a_{\mathrm{g}} < a_{\mathrm{d}}.$$

Comme $F'$ est strictement croissante, on a $F'(a_{\mathrm{g}}) < F'(a_{\mathrm{d}})$, les particules à gauche vont moins vite que les particules à droite, il se crée un 'trou' dans le fluide, ce qui va donner une onde de raréfaction.

On cherche donc une solution continue $u(t, x)$ de la forme :

$$u(t,x) = \begin{cases} a_{\mathrm{g}} \text{ pour } x < F'(a_{\mathrm{g}})t, \\ G(\frac{x}{t}), \text{ pour } F'(a_{\mathrm{g}})t \leq x < F'(a_{\mathrm{d}})t, \\ a_{\mathrm{d}} \text{ pour } F'(a_{\mathrm{d}})t \geq x, \end{cases}$$

où la fonction $G$ est à déterminer. Tout d'abord pour que la fonction $u$ soit continue, il faut que :

$$G(F'(a_{\mathrm{g}})) = a_{\mathrm{g}}, \ G(F'(a_{\mathrm{d}})) = a_{\mathrm{d}}. \tag{3.2}$$

Ensuite pour que $u(t, x) = G(\frac{x}{t})$ soit solution, on obtient :

$$-\frac{x}{t^2} G'(\frac{x}{t}) + F'(G(\frac{x}{t}))\frac{1}{t} G'(\frac{x}{t}) = 0,$$

c'est à dire :

$$-\frac{x}{t} + F'(G(\frac{x}{t})) = 0.$$

En posant $\frac{x}{t} = \lambda$, on obtient :

$$F' \circ G(\lambda) = \lambda, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solution est évidemment :

$$G(\lambda) = F'^{-1}(\lambda),$$

c'est à dire que $G$ est la fonction réciproque de la fonction $F'$. Comme $F'$ est strictement croissante, elle est bijective et possède une fonction réciproque. La condition (3.2) est bien satisfaite.

**Note : ne pas confondre $F'^{-1}$ avec $\frac{1}{F'}$ !**

Plus généralement, supposons que la donnée initiale $g$ est de la forme :

$$g(x) = \begin{cases} g_{\mathrm{g}}(x), \text{ pour } x < 0, \\ g_{\mathrm{d}}(x), \text{ pour } 0 \leq x, \end{cases}$$

avec deux fonctions $g_{\mathrm{g/d}}$ continues sur $\mathbb{R}$ et

$$g_{\mathrm{g}}(0) =: a_{\mathrm{g}} < a_{\mathrm{d}} := g_{\mathrm{d}}(0).$$

on résout (3.1) de la manière suivante :

1) on cherche par la méthode des caractéristiques des solutions (pour $t$ assez petit) $u_{\mathrm{g/d}}$ avec donnée initiale $g_{\mathrm{g/d}}$.

2) la solution $u(t,x)$ est alors donnée par :

$$u(t,x) = \begin{cases} u_{\mathrm{g}}(t,x) \text{ pour } x < F'(a_{\mathrm{g}})t, \\ G(\frac{x}{t}), \text{ pour } F'(a_{\mathrm{g}})t \leq x < F'(a_{\mathrm{d}})t, \\ u_{\mathrm{d}}(t,x) \text{ pour } F'(a_{\mathrm{d}})t \geq x, \end{cases}$$

pour $G = (F')^{-1}$ comme plus haut.