1 Rappels sur les équations différentielles ordinaires

{sec1}

1.1 Equations autonomes

{sec1.1}

On note par $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la variable dans $\mathbb{R}^n$. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction régulière, que l'on considère souvent comme un *champ de vecteurs* sur $\mathbb{R}^n$. On pose $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$.

On considère l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(x(s)), \tag{1.1}$$

{e1.1}

où $x(s) \in \mathbb{R}^n$ qui s'écrit aussi comme un système :

$$\frac{\mathrm{d}x_i(s)}{\mathrm{d}s} = F(x_1(s), \ldots x_n(s)),\ i = 1, \ldots, n.$$

Ces équations différentielles sont appelées *autonomes* car le champ de vecteurs $F(x)$ ne dépend pas du temps.

Pour fixer la solution de (1.1), il faut fixer une condition initiale, c'est à dire résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(x(s)), \\ x(0) = x^0, \end{cases} \tag{1.2}$$

{e1.2}

où $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que le problème (1.2) possède une solution unique pour $s \in]T_-, T_+[$, pour $T_- < 0 < T_+$ dépendant de x^0. Dans la plupart des cas $T_\pm = \pm\infty$, mais pas toujours.

La courbe dans $\mathbb{R}^n$ décrite par $x(s)$ quand s décrit l'intervalle $]T_-, T_+[$ s'appelle la *courbe intégrale* du champ de vecteurs F passant par x^0, ou aussi la *trajectoire* du champ de vecteurs F passant par x^0. Pour indiquer la dépendance de $x(s)$ en fonction de la condition initiale x^0, on écrit :

$$x(s) = X(s, x^0).$$

On peut aussi fixer une condition initiale en un temps s arbitraire, c'est à dire résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(x(s)), \\ x(s^0) = x^0, \end{cases} \tag{1.3}$$

{e1.3}

Comme le champ de vecteurs F est indépendant de s, la solution est donnée par :

$$x(s) = X(s - s^0, x^0).$$

On peut aussi considérer pour s fixé, la fonction :

$$x \mapsto X(s,x)$$

comme une transformation $X(s)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, par la notation :

$$X(s)(x) := X(s,x).$$

La transformation $X(s)$ est appelée le *flot* du champ de vecteurs F pour le temps s.

Le fait que la solution de (1.3) soit unique entraine que :

$$X(s+t)(x) = X(s) \circ X(t)(x), \text{ ou } X(s+t) = X(s) \circ X(t), \ x, t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$ {e1.3a}

En d'autres termes, pour faire évoluer le système pendant le temps $s+t$, on peut le faire évoluer pendant le temps t, puis recommencer (comme si on partait du temps 0) pendant un temps s. On remarque que :

$$X(0,x) = x, \text{ ou } X(0) = Id, \tag{1.5}$$ {e1.3b}

$Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ étant la transformation identique, et donc :

$$X(s)^{-1} = X(-s), \tag{1.6}$$ {e1.3c}

où $X(s)^{-1}$ désigne la transformation inverse de $X(s)$. En d'autres termes pour savoir d'où on est parti, il suffit de remonter le temps en arrière pendant le temps s.

1.2 Equations non autonomes

{sec1.2}

On suppose maintenant que le champ de vecteurs $F(x)$ dépend aussi du temps, c'est à dire que l'on fixe une fonction régulière

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ &(t,x) \mapsto F(t,x). \end{aligned}$$

On considère l'équation différentielle *non autonome* :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(s, x(s)), \\ x(s^0) = x^0, \end{cases} \tag{1.7}$$ {e1.4}

Pour $s^0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. A nouveau elle possède une solution unique pour $s \in]T_-, T_+[$, $T_\pm$ dépendant de (s^0, x^0).

On peut ramener une équation non autonome à une équation autonome en rajoutant une variable supplémentaire, c'est à dire en considèrant l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} = 1, \\ \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(t(s), x(s)), \\ t(0) = s^0, x(0) = x^0, \end{cases} \tag{1.8}$$ {e1.5}

C'est une équation autonome dans $\mathbb{R}^{1+n}$, avec le nouveau champ de vecteurs :

$$G(t, x) = (1, F(t, x)) \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

La solution de (1.7) se note :

$$x(s) = X(s, s^0, x^0) = X(s, s^0)(x^0),$$

pour indiquer la dépendence en fonction du temps initial s^0 et de la condition initiale x^0.

L'analogue de (1.4), (1.5), (1.6) est :

$$X(s, t) = X(s, t_1) \circ X(t_1, s),\ \ X(s, s) = Id,\ \ X(s, t)^{-1} = X(t, s). \tag{1.9}$$ {e1.6}

2 Equations de transport linéaires

{sec2}

2.1 Cas sans terme de source

{sec2.1}

On fixe une fonction régulière :

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ &(t, x) \mapsto F(t, x), \end{aligned}$$

et on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \sum_{i=1}^n F_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(t, x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x), \end{cases} \tag{2.1}$$ {e2.1}

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction fixée, appelée *condition initiale*. L'écriture condensée est :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + F(t, x) \cdot \nabla_x u = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u_{|t=0} = g. \end{cases}$$

Dans la pratique la fonction $u(t, x)$ représente la densité au temps t et au point x d'un fluide dont les particules se déplacent le long des courbes intégrales du champ de vecteurs $F(t, x)$.

Courbes caractéristiques

Pour résoudre l'équation (2.1), on doit étudier les *courbes caractéristiques*, qui sont les courbes intégrales (tracées dans $\mathbb{R}^{1+n}$) de l'équation différentielle :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} = 1, \\ \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(t(s), x(s)), \\ t(0) = s^0, x(0) = x^0. \end{array}\right.$$

L"équation pour $t(s)$ possède la solution évidente $t(s) = s + s^0$. L'équation pour $x(s)$ est une équation différentielle (en générale non autonome, si F dépend de t) vue dans la sous section 1.2.

La solution de cette équation est donc donnée par :

$$t(s) = s + s^0, x(s) = X(s, s^0, x^0),$$

avec les notations de la sous section 1.2.

Lemme 2.1 *Si $u(t, x)$ est une solution de (2.1), la fonction*

$$v(s) = u(t(s), x(s))$$

est constante, pour tout (s^0, x^0).

Dém. on calcule :

$$\begin{aligned} v'(s) = &\ \frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial t}u(t(s), x(s)) + \nabla_x u(t(s), x(s)) \cdot \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} \\ = &\ \frac{\partial}{\partial t}u(t(s), x(s)) + \nabla_x u(t(s), x(s)) \cdot F(t(s), x(s)) = 0, \end{aligned}$$

à cause de l'équation vérifiée par u. $\square$

Le lemme nous dit que pour trouver la valeur de la solution en un point (t, x), il faut suivre la courbe $(t(s), x(s))$ jusqu'à rencontrer un point où on connait la valeur de la solution, c'est à dire un point où $t(s) = 0$. On obtient donc le theorème :

Théorème 2.2 *La solution de (2.1) est donnée par :*

$$u(t, x) = g(X(-t, t, x)).$$

2.2 Cas avec terme de source

{sec2.2}

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^n F_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x) = f(t,x) \text{ dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x), \end{cases} \tag{2.2}$$

{e2.1b}

où $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions fixées. La fonction f est appelée *terme de source*, et correspond à la possibilité de créer (si $f \geq 0$) ou de détruire (si $f \leq 0$) des particules de fluide au temps t et au point x.

Théorème 2.3 *La solution de (2.2) est donnée par :*

$$u(t,x) = g(X(-t,t,x)) + \int_{-t}^{0} f(s+t, X(s,t,x))\mathrm{d}s.$$

Dém. le même calcul donne que

$$v'(s) = f(s+t, x(s)).$$

Pour connaitre $u(t,x)$, il faut ajouter à la valeur de u au point de la courbe caractéristique où $t(s) = 0$ l'intégrale de $f(s+t, x(s))$ le long de la courbe. □

2.3 Cas avec un terme de source linéaire en u

{sec2.3}

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^n F_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x) + c(t,x)u(t,x) = f(t,x) \text{ dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

{e2.1c}

Le terme additionel $c(t,x)u(t,x)$, correspond à un terme de source proportionel à u.

Plutôt que de retenir une formule, il vaut mieux considérer à nouveau $v(s) = u(t(s), x(s))$. On obtient :

$$\begin{aligned} v'(s) = & \ \frac{\partial}{\partial t}u(t(s),x(s)) + \nabla_x u(t(s),x(s)) \cdot F(t(s),x(s)) \\ = & \ -c(t(s),x(s))v(s) + f(t(s),x(s)). \end{aligned}$$

La fonction (scalaire) $v(s)$ vérifie donc une équation différentielle linéaire très simple :

$$v'(s) = -r(s)v(s) + h(s),$$

pour :

$$r(s) = c(t(s),x(s)), \ h(s) = f(t(s),x(s)),$$

que l'on résout par la méthode de la variation de la constante. On obtient :

$$v(s) = v(-s^0)\mathrm{e}^{-\int_{-s^0}^{s} r(s_1)\mathrm{d}s_1} + \int_{-s^0}^{s} h(s_1)\mathrm{e}^{-\int_{s_1}^{s} h(s_2)\mathrm{d}s_2}\mathrm{d}s_1.$$

3 Equations de transport non linéaires

{sec3}

On fixe maintenant une fonction régulière :

$$
\begin{aligned}
&F : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_u \to \mathbb{R}^n,\\
&(t, x, u) \mapsto F(t, x, u),
\end{aligned}
$$

et une fonction régulière :

$$
\begin{aligned}
&c : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_u \to \mathbb{R},\\
&(t, x, u) \mapsto c(t, x, u),
\end{aligned}
$$

et on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \sum_{i=1}^n F_i(t,x,u(t,x)) \frac{\partial}{\partial x_i} u(t,x) - c(t,x,u(t,x)) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\\
u(0,x) = g(x),
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

{e2.3}

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction fixée, appelée *condition initiale*, et l'inconnue u est une fonction scalaire $u(t, x)$.

L'écriture condensée est :

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t} u + F(t,x,u) \cdot \nabla_x u - c(t,x,u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\\
u_{|t=0} = g.
\end{cases}
$$

A nouveau $u(t, x)$ représente une densité, mais la vitesse des particules $F(t, x, u)$ dépend aussi de la densité, ainsi que le terme de source $c(t, x, u)$. L'équation est donc une équation non linéaire.

courbes caractéristiques

Il faut rajouter une variable additionnelle correspondant à u. Les courbes caractéristiques sont maintenant données par l'équation différentielle :

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} = 1,\\
\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(t(s), x(s), z(s)),\\
\frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} = c(t(s), x(s), z(s)),\\
t(0) = 0, x(0) = x^0, z(0) = z^0.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

{e3.1}

Ce sont des courbes tracées dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_z$. La première équation se résout évidemment par $t(s) = s$.

Lemme 3.1 *Si $z^0 = g(x^0)$ et si $u(t, x)$ est solution de (3.4), la fonction :*

$$f(s) = u(t(s), x(s)) - z(s)$$

est identiquement nulle.

Dém. on pose $v(s) = u(t(s), x(s))$, et on calcule :

$$\begin{aligned} f'(s) = & \ \tfrac{\partial}{\partial t}u(t(s),x(s))\tfrac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} + \nabla_x u(t(s),x(s)) \cdot \tfrac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} - \tfrac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} \\ = & \ \tfrac{\partial}{\partial t}u(t(s),x(s)) + F(t(s),x(s),z(s)) \cdot \nabla_x u(t(s),x(s)) - c(t(s),x(s),z(s)). \end{aligned}$$

Comme u vérifie l'équation, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t(s),x(s)) = -F(t(s),x(s),v(s)) \cdot \nabla_x u(t(s),x(s)) + c(t(s),x(s),v(s)),$$

et donc :

$$\begin{aligned} f'(s) = & \ \tfrac{\partial}{\partial t}u(t(s),x(s))\tfrac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} + \nabla_x u(t(s),x(s)) \cdot \tfrac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} - \tfrac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} \\ = & \ [c(t(s),x(s),v(s)) - c(t(s),x(s),z(s))] \\ 52mm & \ +[F(t(s),x(s),z(s)) - F(t(s),x(s),v(s))] \cdot \nabla_x u(t(s),x(s)). \end{aligned}$$

Par la formule des accroissements finis, on a, pour toute fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable :

$$|G(a) - G(b)| \leq C|a - b|.$$

On applique cette inégalité aux termes entre crochets, et on obtient que :

$$|f'(s)| \leq C|f(s)|.$$

D'autre part on a $f(0) = u(0, x^0) - z^0 = 0$ si $z^0 = g(x^0)$. Dans ce cas on a en intégrant :

$$|f(s)| \leq C \int_0^s |f(s_1)|\mathrm{d}s_1.$$

Par l'inégalité de Gronwall, on en déduit que $f(s) = 0$ pour tout s. □

On va utiliser le lemme pour trouver une formule donnant la solution de (3.4).

Méthode :

1) On résout l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(s, x(s), z(s)), \\ \frac{\mathrm{d}z(s)}{\mathrm{d}s} = c(s, x(s), z(s)), x(0) = x^0, z(0) = g(x^0), \end{cases}$$

c'est à dire qu'on résout (3.5) (sachant que $t(s) = s$), avec la condition initiale pour $z(0)$ donnée par le lemme. Pour indiquer la dépendance en x^0, on pose :

$$x(s) = X(s, x^0).$$

2) On résout (c'est possible pour s assez petit), l'équation en y :

$$X(s,y) = x,$$

où s, x sont des paramètres.

3) On note la solution de cette équation :

$$y = Y(s,x),$$

pour indiquer la dépendance en s, x.

4) La solution de l'équation (3.4) est alors donnée par :

$$u(t,x) = z(t, Y(t,x)).$$

3.1 Cas particuliers simples

L'équation des caractéristiques se simplifie si $c(t,x,u) \equiv 0$. Dans ce cas on a $z(s) = g(x^0)$ pour tout s, et il ne reste que l'équation différentielle en x :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(s, x(s), g(x^0)), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

On a donc :

$$u(s, X(s,x)) = Cste = g(x),$$

et donc :

$$u(t,x) = g(Y(t,x)).$$

Un cas encore plus simple est quand $c(t,x,u) \equiv 0$ et $F(t,x,u) = F(u)$. L'équation en x devient :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = F(g(x^0)), \\ x(0) = x^0, \end{cases}$$

de solution :

$$x(s) = x^0 + sF(g(x^0)).$$

Tous les calculs sont donc explicites.