Partiel de Mathématiques Master 1 Mécanique

Durée 2h.

Le Lundi 27 Octobre 2008.

Exercice 1. Pour chacune des équations aux dérivées partielles suivantes, donner son ordre et dire si elle est linéaire ou non linéaire.

Equation de Schroedinger :

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = V(x)u(t,x) \text{ pour } u : \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^3_x \to \mathbf{C},$$

Equation biharmonique :

$$\Delta^2_x u(x) = 0, \text{ pour } u : \mathbf{R}^3_x \to \mathbf{R},$$

Equation de Korteweg de Vries :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + 6u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,x) = 0 \text{ pour } u : \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x \to \mathbf{R},$$

Equation eikonale :

$$(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y))^2 + (\frac{\partial}{\partial y}u(x,y))^2 = n(x,y) \text{ pour } u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}.$$

Equation de Black-Scholes :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + rx\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) - ru(t,x) = 0, \quad \text{pour } u : \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x \to \mathbf{R}.$$

Exercice 2. Soit $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ la surface paramétrée définie par le paramétrage :

$$[0,\sqrt{2}] \times [0,2\pi] \ni (t,s) \mapsto x(t,s) = (t\cos s, t\sin s, 1 - \frac{t^2}{2}).$$

1) Montrer que Σ est incluse dans la calotte parabolique :

$$C = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 |\, 0 \leq x_3 \leq 1,\ x_3 = 1 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\}.$$

2) Calculer les vecteurs $\frac{\partial x(t,x)}{\partial t}$ et $\frac{\partial x(t,s)}{\partial s}$.

Donner la définition du vecteur normal unitaire $\vec{\nu}(t,s)$ au point $x(t,s)$ de Σ et le calculer.

3) Donner la définition de l'élément d'aire d^2S en fonction de $dtds$.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \backslash \{0\} :\to \mathbf{R}$ la fonction :

$$(x_1,x_2) \mapsto \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Calculer l'intégrale :

$$I = \int\int_\Sigma f(x_1,x_2)d^2S,$$

Exercice 3. Soit f, f_1, f_2 trois fonctions de classe C^2 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, et soit $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2.

1) Calculer $\Delta(f_1 f_2)$.

2) Calculer $\Delta(F \circ f)$.

Exercice 4. On considère l'équation de transport :

$$(1)\ \partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0,\ \text{dans } \mathbf{R}^2,$$

où $c > 0$ est une constante. Soit $u(t,x)$ la solution de (1) telle que :

$$u(t,0) = f(t),$$

où $f(t)$ est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, périodique de période 1 telle que :

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ pour } 0 \leq t < 1, \\ 0 \text{ pour } t = 1. \end{cases}$$

1) Montrer sans calcul que la solution $u(t,x)$ est périodique en t de période 1.

2) Déterminer la fonction $u(t,x)$.

3) Tracer le graphe de $u(0,x)$.

Exercice 5. Soit $u(t,x)$ une fonction définie sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$ solution de :

$$\begin{cases} t\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + x\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0 \text{ dans }]0,+\infty[\times\mathbf{R}, \\ u(1,x) = g(x), \end{cases}$$

pour une fonction g continue.

1) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$u(t,x) = u(\lambda t, \lambda x).$$

2) En déduire que

$$u(t,x) = g(\frac{x}{t}).$$

Sous quelles conditions sur g la limite :

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) \text{ existe t'elle pour tout } x \in \mathbf{R}?$$