Partiel de Mathématiques Master 1 Mécanique

Durée 2h.

Le Lundi 26 Octobre 2009.

Exercice 1. On considère la sphère unité $S \subset \mathbb{R}^3$ d'équation :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

1) Donner un paramétrage de la surface S à l'aide des coordonnées sphériques (φ, θ).

2) Exprimer le vecteur normal unitaire extérieur $\vec{\nu}(\varphi, \theta)$.

3) Soit $\vec{F}(x)$ le champ de vecteur défini par

$$\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers la surface S :

$$I = \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} \; d^2S.$$

Exercice 2. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq t\}.$$

1) Dessiner le domaine D.

2) Montrer que si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction test (infiniment dérivable et à support compact), on a :

$$(1) \quad \iint_D u(t, x) dt dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{|x|}^{+\infty} u(t, x) dt,$$

et

$$(2) \quad \iint_D u(t, x) dt dx = \int_0^{+\infty} dt \int_{-t}^{t} u(t, x) dx.$$

3) En déduire que si $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction test, on a :

$$(3) \quad \iint_D \partial_t v(t, x) - \partial_x v(t, x) dt dx = -2 \int_0^{+\infty} v(s, s) ds.$$

Indication : appliquer les deux formules précédentes à $u = \partial_t v$ ou à $u = -\partial_x v$.

4) Montrer que si φ est une fonction test on a :

$$\partial_t^2 \varphi(t, x) - \partial_x^2 \varphi(t, x) = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t \varphi(t, x) + \partial_x \varphi(t, x)).$$

5) En appliquant 3) et 4) montrer que si φ est une fonction test on a :

$$\iint_D \partial_t^2 \varphi(t, x) - \partial_x^2 \varphi(t, x) dt dx = -2 \int_0^{+\infty} \partial_t \varphi(s, s) + \partial_x \varphi(s, s) ds.$$

6) En déduire que :

$$\iint_D \partial_t^2 \varphi(t, x) - \partial_x^2 \varphi(t, x) dt dx = 2\varphi(0, 0).$$

Exercice 3. 1) Résoudre par la méthode des caractéristiques l'équation :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x_1, x_2) + x_2 \partial_{x_1} u(t, x_1, x_2) - x_1 \partial_{x_2} u(t, x_1, x_2) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_x, \\ u(0, x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \end{cases}$$

pour une fonction g donnée.

2) Montrer que la solution de (1) est périodique de période 2π dans la variable t.