

Exercice 1

1) f est dérivable sur $]0,1[$, dérivable à gauche en 1 donc il en est de même pour g .

On a $f(0)=0$, $f'(0)=0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = f'(0)=0 = g(0)$, g est continue à droite en 0.

2) g est continue sur $[0,1]$, donc est majorée et atteint ses bornes sur $[0,1]$.

Il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $g(x) \leq g(c) \quad \forall x \in [0,1]$.

3) g est dérivable sur $]0,1[$ avec $g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$. En particulier

$g'(1) = -1$. Comme f est continue, g est continue sur $]0,1[$, donc g est strictement décroissante sur un intervalle $[1-\delta, 1]$. g est donc strictement décroissante sur $[1-\delta, 1]$, donc $g(x) > g(1)$ si $x \in]1-\delta, 1[$.

Ceci entraîne que 1 n'est pas un maximum de g sur $[0,1]$, donc $c \neq 1$.

4) on a $g(0)=0$, $g(1)=1 > g(0)$ donc $c \neq 0$. Comme $c \in]0,1[$, on doit avoir $g'(c)=0$ par le principe de Fermat, donc $f(c) = c f'(c)$.

Exercice 2

1) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

2) $x'(t) = 1 - 4/t^2$, $y'(t) = 1/3 \cdot \frac{-3}{(t+1)^2}$.

t	$-\infty$	-4	-2	-1	0	2	$+\infty$
$x(t)$	+	+	0	-	-	-	+
$x(t)$	$-\infty$	-5	-4	-5	$+\infty$	4	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	-	-	-	0	+
$y(t)$	$-\infty$	$-1/3$	$-5/3$	$+\infty$	5	$1/3$	$+\infty$

3) t_g horizontale pour $t = -4$, ~~$t = 2$~~

donc les points $(-5, -1/3)$ & ~~$(4, 1/3)$~~ .

t_g verticale pour $t = -2$ point $(-4, -5/3)$

point singulier pour $t = 2$ point $(4, 1/3)$.

4) Asymptotes: ~~$x = -1$, $x = 0$ asymptotes verticales.~~
 $y = 5$ asymptote horizontale
 $x = -5$ asympt. verticale
 $y = 2/3 + 2$ asymptote oblique en $\pm \infty$.

$$5): x(2+s) = 4 + s^2/2 + s^2 \varepsilon(s)$$

$$y(2+s) = \frac{11}{3} + s^2/9 + s^2 \varepsilon(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{y(t) - y(2)}{x(t) - x(2)} = 2/9.$$

Exercice 3

1) On intègre 2 fois par parties:

$$I = \int_0^1 \frac{e^t}{u'} \frac{\sin t}{v} dt = \left[\frac{e^t \sin t}{uv} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^t}{u} \frac{\cos t}{v'} dt$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{u'} \frac{\cos t}{v} dt = \left[\frac{e^t \cos t}{uv} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{u} \frac{(-\sin t)}{v'} dt$$

$$\text{donc } I = \left[\frac{e^t \sin t}{uv} - \frac{e^t \cos t}{uv} \right]_0^1 - I$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{e^t \sin t}{uv} - \frac{e^t \cos t}{uv} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e(\sin 1 - \cos 1) + 1).$$

2) on pose $\ln x = t$ $dt = \frac{1}{x} dx$, $dx = x dt = e^t dt$.

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx = \int_0^1 \sin t e^t dt = \frac{1}{2} (e(\sin 1 - \cos 1) + 1).$$

Exercice 4

1) polynôme caractéristique: $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ $\Delta = -4$, racines

$1+i$, $1-i$, la sol. gén. de (H) est

$$y(t) = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $\sin t = e^{\lambda t} \sin \omega t$ pour $\lambda=0$ $\omega=1$, la fréquence complexe correspondante est donc $\lambda+i\omega=i$, qui n'est pas racine de $P(\lambda)$.
On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$x(t) = a \cos t + b \sin t, \text{ donc}$$

$$x'(t) = -a \sin t + b \cos t, \quad x''(t) = -a \cos t - b \sin t$$

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = -a \cos t - b \sin t - 2(-a \sin t + b \cos t) + 2a \cos t + 2b \sin t$$

$$= \cos t (a - 2b) + \sin t (b + 2a) \stackrel{?}{=} \sin t, \quad \text{on obtient:}$$

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1/5 \\ a = 2/5 \end{cases} \quad x(t) = 2/5 \cos t + 1/5 \sin t.$$

la sol générale de (E) est donc:

$$x(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + 2/5 \cos t + 1/5 \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$3) \text{ on a } x'(t) = c_1 (e^t \cos t - e^t \sin t) + c_2 (e^t \sin t + e^t \cos t) - \frac{2}{5} \sin t + \frac{1}{5} \cos t \quad \text{donc}$$

$$x(0) = c_1 + 2/5$$

$$x'(0) = c_1 + c_2 + 1/5$$

$$\text{on obtient: } \begin{cases} c_1 + 2/5 = 4 \\ c_1 + c_2 + 1/5 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = 3/5, \quad c_2 = -4/5.$$