

---

## Partiel Math 151R

Durée 2h. A rendre avant le 12 Novembre 2020 à 16h

Scanner ou prendre des photos lisibles de chaque page de votre travail (une photo par page). En cas de problème pour rendre votre travail sur Ecampus, l'envoyer par mail à christian.gerard@math.u-psud.fr en indiquant dans le mail votre nom groupe de TD et numéro d'étudiant.

Pour les étudiants ayant un tiers temps: envoyer votre travail par mail à christian.gerard@math.u-psud.fr avant le 12 Novembre 2020 à 16h40.

Pour poser vos questions pendant le partiel: se connecter sur la page Collaborate habituelle des cours

<https://ecampus.paris-saclay.fr/mod/collaborate/view.php?id=215343> où je serai disponible.

---

Le 12 Novembre 2020.

**Exercice 1.** Soit  $A$  l'ensemble

$$A = \{x^2 + y^2 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, xy = 1\}.$$

1) Montrer que  $A = \{x^2 + x^{-2} : x > 0\}$ .

2) l'ensemble  $A$  est-il minoré, majoré? Le cas échéant déterminer  $\inf A$  et  $\sup A$ .

*Indication : on pourra considérer la fonction  $]0, +\infty[ \ni x \mapsto f(x) = x^2 + x^{-2}$ .*

**Exercice 2.** Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x(1 - \cos x)}$$

**Exercice 3.** 1) Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions

$$\ln(1 + 2x) - 2 \sin x, 1 - e^x + \sin x$$

2) en déduire la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2 \sin x}{1 - e^x + \sin x}.$$

**Exercice 4.** 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 - z + (1 + i) = 0.$$

2) En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :

$$z^4 - z^2 + (1 + i) = 0.$$

**Exercice 5.** Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^{-x} \sin x}{x}.$$

- 1) Calculer un DL à l'ordre 2 de  $f$  en  $x = 0$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$ .
- 2) On prolonge  $f$  par continuité en 0 c'est à dire que l'on pose  $f(0) = l$ . Montrer que la fonction  $f$  (prolongée par continuité en 0) est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
*Indication : on traitera séparément la dérivabilité en  $x = 0$ .*
- 3) Déterminer la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse 0 et la position du graphe par rapport à la tangente.