
Examen de rattrapage de Math 151R
Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.
Téléphones éteints et rangés dans les sacs.
Ecrire son nom de manière lisible sur chaque copie.
Numéroter chaque copie, ne pas la cacheter.

Le 13 Juin 2023.

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

- 1) Montrer que le graphe de f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.
- 2) Donner l'équation cartésienne de ces deux tangentes.

Exercice 2. Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$.

- 1) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$ pour f .
- 2) En déduire que

$$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx.$$

Indication : intégrer par parties deux fois de suite.

Exercice 4. 1) Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions :

$$\ln(1+x) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad 1 - e^{x/2} + \frac{1}{2}\sin x.$$

- 2) Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - e^{x/2} + \frac{1}{2}\sin x}.$$

Exercice 5. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = \sin t.$$

- 1) Résoudre l'équation homogène associée.
- 2) Résoudre l'équation (E). On cherchera d'abord une solution particulière de (E).
- 3) Question bonus : déterminer l'unique solution de (E) telle que $x(0) = x'(0) = 0$.