

Exercice 1.

1) on a $(m+n)^2 - 4mn = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2 \geq 0$ donc $4mn \leq (m+n)^2$ donc

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

2) Comme $0 \leq \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ on a $A \subset [0, 1/4]$ donc A est bornée.

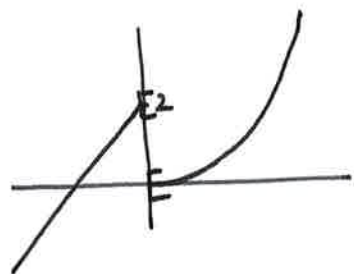
3) 0 est un minant de A . De plus en prenant $m=1, n=p$ on a $x_p = \frac{p}{1+p^2} \in A$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = 0$ donc 0 est la borne inférieure de A , d'après un résultat du cours.

pour $m=n=1$, $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \in A$ donc $1/4$ est le plus grand élément de A donc $\frac{1}{4} = \sup A$. Finalement si A admet un plus petit élément, il doit être égal à $\inf A$, qui vaut 0 , mais $0 \notin A$, donc A n'a pas de plus petit élément.

Exercice 2.

1) si $a=0, b=1$ on a $f'(x) = 6x+1$ si $x > 0$, $f'(x) = 1$ si $x < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$. On obtient le graphique:



2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$ $f(0) = a$, f est continue en 0 ssi $a=2$.

f est continue en tout $x \neq 0$, donc f est continue sur \mathbb{R} ssi $a=2$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, avec $f'(x) = 6x+1$ si $x > 0$, $f'(x) = b$ si $x < 0$.

Pour étudier la dérivabilité en 0 on regarde $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. (De plus $a=2$ car f doit être continue en 0)

Pour $x > 0$ $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{3x^2+x}{x} = 1+3x$

pour $x < 0$ $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{bx+2-2}{x} = b$, donc f est dérivable en 0 ssi

$a=2$ et $b=1$.

Exercice 3

(2)

soit $z_0 = \frac{2+5i}{1-i}$, me $z_1 = z_0 + \bar{z}_0$.

$$z_0 = \frac{(2+5i)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{-3+7i}{2}, \text{ donc } z_1 = -3.$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3} \quad \left(\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{donc } \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

Exercice 4.

1) $\Delta = (3+4i)^2 - 4(-1+5i) = 9 - 16 + 24i + 4 - 20i = -3 + 4i$.

on calcule " $\pm \sqrt{\Delta}$ ", donc on résout

$$(x+iy)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5. \end{cases}$$

on obtient: $x^2 = 1, y^2 = 4, xy > 0$ donc

$$x+iy = \pm (1+2i).$$

les racines de l'équation sont donc: $z = 2+3i, z = 1+i$.

2) On cherche les racines carrées de $1+i$: $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$,

les 2 racines carrées sont $2^{1/4} e^{i\pi/8}$. Un calcul en coordonnées donne:

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i \sqrt{\sqrt{2}-1} \right).$$

On cherche les racines carrées de $2+3i$:

$$(x+iy)^2 = 2+3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{13} \end{cases}$$

$$x+iy = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}} \right)$$

\Rightarrow les 4 racines du polynôme sont:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i \sqrt{\sqrt{2}-1} \right), \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}} \right).$$

Exercice 5.

1) on a $f(x) = x^2 \varepsilon(x)$ pour $\varepsilon(x) = x \sin(\frac{1}{x})$, on a

$$|\varepsilon(x)| \leq |x| \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le DL de $f(x)$ en 0 est l'ordre 2 et $f(x) = x^2 \varepsilon(x)$ ($b_0 = b_1 = b_2 = 0$).

2) on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 \sin(\frac{1}{x})}{x} = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$,

f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x^3 \cdot (-\frac{1}{x^2}) \cos(\frac{1}{x})$
 $= 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x}).$

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x})}{x} = 3x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}).$$

$\lim_{x \rightarrow 0} 3x \sin(\frac{1}{x}) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas, donc f' n'est pas

dérivable en $x = 0$.

0) Soit $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ $n \in \mathbb{N}^+$. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

et $\sin(\frac{1}{x_n}) = 1$, $\cos(\frac{1}{y_n}) = -1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

en prenant $x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{\pi/2 + (2n+1)\pi}$ on obtient le même résultat

pour $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$.