

Exercice 1

1) $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i$. Racines carrées de Δ :

$$\begin{cases} (x+iy)^2 = -3-4i \\ x^2+y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = -3 \\ x^2+y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ x, y \text{ de signes contraires.} \end{cases}$$

$\pm \sqrt{\Delta} = \pm(1 \mp 2i)$ racines: $\frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = i, 1-i$.

2)

Exercice 2.

1) on résout $x^2+3x-4=0$ on trouve $x=1$ ou $x=-4$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$. $\mathbb{R} \setminus \{1, -4\}$

2) on a $x^2-3x-4 > 0$ si $x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$
 $x^2-3x-4 < 0$ si $x \in]-4, 1[$.

si $x^2-3x-4 > 0$ $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \geq x^2+3x-4 \Leftrightarrow x^2+2x-5 \leq 0$

si $x^2-3x-4 < 0$ $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq x^2+3x-4 \Leftrightarrow x^2+2x-5 \geq 0$.

Etude du signe de x^2+2x-5 :

$\Delta = 4+20 = 24$, racines $-1 \pm \sqrt{6}$.

On doit placer $-1 \pm \sqrt{6}$ par rapport à $1, -4$:

$-4 < -1-\sqrt{6} < -3$
 $4 < 6 < 25 \Rightarrow 2 < \sqrt{6} < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{6}-1 < 4$, donc

~~$-1-\sqrt{6} < -1+\sqrt{6} < 4$~~ , ~~$x^2+2x-5 > 0$ sur $]-\infty, -1-\sqrt{6}[\cup]1+\sqrt{6}, +\infty[$~~

Donc $f(x) \geq 1$ si $x \in]-\infty, -1-\sqrt{6}[\cup]1+\sqrt{6}, +\infty[$.

$x \in]-4, -1-\sqrt{6}[\cup]1, \sqrt{6}-1[$.

Exercice 3.

1) $(a^n - b^n) \mid a + b^n(a-b) = a^{n+1} - b^n a + b^n a - b^{n+1} = a^{n+1} - b^{n+1}$

2) pour $n=1$ $a-b$ divise $a-b$. Supposons que $a-b$ divise $a^n - b^n$.

Alors $a-b$ divise $a(a^n - b^n)$ et $b^n(a-b)$, donc $a-b$ divise $a^{n+1} - b^{n+1}$.

Exercice 4.

C2

On a $0 \leq \frac{2}{q} \leq 2$ pour $q \in \mathbb{N}^+$, $-1 \leq \frac{(-1)^p}{p} \leq 1$ pour $p \in \mathbb{N}^+$ donc

$-1 \leq \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q} \leq 3$ pour $p, q \in \mathbb{N}^+$ donc $A \subset [-1, 3]$, A est minoré et majoré.

On a $A = A_1 \cup A_2$ où

$$A_1 = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q} : p \in \mathbb{N}^+ \text{ pair}, q \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q} : p \in \mathbb{N}^+ \text{ impair}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{2p} + \frac{2}{q}, p, q \in \mathbb{N}^+ \right\}, \quad A_2 = \left\{ -\frac{1}{2p+1} + \frac{2}{q}, p, q \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

si $p \geq 1, q \geq 1$ $\frac{1}{2p} + \frac{2}{q} \leq \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2} \in A_1$ donc $\sup A_1 = \max A_1 = \frac{5}{2}$.

De même $\frac{1}{2p} + \frac{2}{q} \geq 0$ et en prenant $p=q=n$ $\frac{1}{2n} + \frac{2}{n} \rightarrow 0$ donc

$0 = \inf A_1$ ($0 \notin A_1$!). (la suite $x_n = \frac{1}{2n} + \frac{2}{n}$ appartient à A_1 et tend vers 0).

On regarde maintenant A_2 .

si $p \geq 0, q \geq 1$, $-1 \leq -\frac{1}{2p+1} + \frac{2}{q}$ et en prenant $p=0, q=n$

$x_n = -\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{n}$ tend vers -1, donc $-1 = \inf A_2$ ($-1 \notin A_2$).

De même $-\frac{1}{2p+1} + \frac{2}{q} \leq 2$ (car $q \geq 1$) et en prenant $q=1, p=n$

$x_n = -\frac{1}{2n+1} + 2$ tend vers 2 donc $2 = \sup A_2$ ($2 \notin A_2$).

On a donc $\sup A_1 = \frac{5}{2}$, $\inf A_1 = 0$, $\sup A_2 = 2$, $\inf A_2 = -1$ donc

$\sup A = \frac{5}{2}$, $\inf A = -1$.

Exercice 5

1) on montre que $A =]0, 1]$.

1) $A \subset]0, 1]$: si $x \in A$ on a $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ pour un $n \in \mathbb{N}^+$ donc $0 < x \leq 1$.

$]0, 1] \subset A$: si $0 < x \leq 1$, il existe un $n \in \mathbb{N}^+$ tel que $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ donc $x \in A$.

autre preuve: $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] =]0, 1]$.

2) on montre que $B = \{1\}$

1) $1 \in B$ clair.

2) si $x \in B$ alors $\frac{1}{n} \leq x \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ donc pour $n=1$ $1 \leq x \leq 1$ donc $x=1$.

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right] = \{1\}.$$

Exercice 6.

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$

On regarde si f a une limite finie en 0: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ (= dérivée de $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x=0$) = $\frac{1}{2}$.

On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$.

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}, \quad x(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{1}{2}.$$

3) on a $\frac{x}{|x| + \sin x} = \frac{1}{\frac{|x| + \sin x}{x}} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sin x/x} & \text{pour } x > 0 \\ \frac{1}{-1 + \sin x/x} & \text{pour } x < 0. \end{cases}$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$ $\frac{x}{|x| + \sin x}$ tend vers $\frac{1}{2}$,

quand $x \rightarrow 0^-$ $\left| \frac{x}{|x| + \sin x} \right|$ tend vers $+\infty$ (le dénominateur tend vers 0)

Donc la fonction n'a pas de limite en 0.