

Corrigé partiel 2020

Exercice 1

1) on montre que $B = \{x^2 + \bar{x}^2 : x > 0\}$ est inclus dans A .

on écrit $x^2 + \bar{x}^2 = x^2 + y^2$ avec $y = \frac{1}{x}$ et donc $xy = 1$.

On a donc $x^2 + \bar{x}^2 \in A$ et $B \subset A$.

on montre que $A \subset B$: si $\lambda = x^2 + y^2$ avec $xy = 1$ alors $y = \frac{1}{x}$, $\lambda = x^2 + \bar{x}^2$ et on peut supposer que $x > 0$, donc $\lambda \in B$ et $A \subset B$.

Finalement on a bien $A = B$ #

Exercice 2 on a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On

calcule un DL du numérateur et du dénominateur en allant jusqu'au 1^{er} terme non nul:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x),$$

$$\text{donc } \sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x),$$

$$\begin{aligned} 2\sin x - \sin(2x) &= 2x - \frac{2x^3}{6} - \left(2x - \frac{8x^3}{6}\right) + x^3 \varepsilon_3(x) \\ &= x^3 + x^3 \varepsilon_3(x). \end{aligned}$$

$$\text{Puis: } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_4(x),$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &= \frac{x^2}{2} - x^2 \varepsilon_4(x), \\ x(1 - \cos x) &= \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon_5(x). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } f(x) = \frac{x^3 + x^3 \varepsilon_3(x)}{\frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon_5(x)} = \frac{1 + \varepsilon_3(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon_5(x)},$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2. \#$$

Exercice 3

$$1) \text{ on a } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2 \varepsilon(u) \text{ (DL en 0)}$$

$$\text{donc } \ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + x^2 \varepsilon(x),$$

$$\text{et } \sin x = x + x^2 \varepsilon(x), \text{ donc}$$

$$\ln(1+2x) - 2\sin x = -2x^2 + x^2 \varepsilon(x).$$

$$\text{Puis } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x), \sin x = x + x^2 \varepsilon(x),$$

dnc $1 - e^{ix} + i \sin x = \frac{-x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$

On a donc: $\frac{\ln(1+2x) - 2i \sin x}{1 - e^{ix} + i \sin x} = \frac{-2x^2 + x^2 \varepsilon(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)}$

$= \frac{-2 + \varepsilon(x)}{-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}$ la limite en $x=0$ vaut dnc 4. #

Ex 4. On calcule $\Delta (= b^2 - 4ac) = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i,$

puis les racines carrées de Δ c'est à dire qu'on résout:

$z^2 = -3 - 4i \quad (z = x + iy)$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$, on rajoute l'équation additionnelle $|z|^2 = x^2 + y^2 = |-3 - 4i| = 5.$

on trouve $x^2 = 1, y^2 = 4, x = \pm 1, y = \pm 2$

et $xy < 0$, les deux racines sont

$\pm (1 - 2i)$

les 2 solutions de l'équation sont: " $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ " dnc:

$\frac{1 + (1 - 2i)}{2} = 1 - i$ et $\frac{1 - (1 - 2i)}{2} = i.$

2) en posant $z^2 = u$ on obtient $u^2 - u + (1+i) = 0$, dnc

$z^2 = 1 - i$ ou $z^2 = i$

On cherche les 2 racines carrées de i et $1 - i$ à l'aide de la forme trigonométrique:

$|1 - i| = \sqrt{2} \quad 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}, \quad i = e^{i\pi/2}$

on obtient

$z = \pm \sqrt[1/4]{e^{-i\pi/4}} \quad \text{ou} \quad z = \pm \sqrt[1/4]{e^{i\pi/4}}.$

On peut aussi calculer directement les 2 racines carrées de $1 - i$,

on obtient

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \\ x^2 + y^2 = |1 - i| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \\ xy < 0 \end{cases}$

dnc

$x + iy = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \sqrt{2}} - i \sqrt{\sqrt{2} - 1})$

ceci permet aussi de calculer $\cos \pi/8$ et $\sin \pi/8$.

Exercice 5

1) $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$

donc $e^{-x} \sin x = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$,

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} \sin x}{x} = 1.$$

2) la fonction f , prolongée par continuité en $x=0$ par $f(0)=1$ est continue en 0 et admet un DL à l'ordre 1 en 0, elle est donc dérivable en 0, avec $f'(0) = -1$.

Elle est dérivable en tout $x \neq 0$ comme quotient de 2 fct dérivables.

3) la tangente au graphe en $x=0$ est donnée par l'équation $y = 1 - x$.

On a $f(x) - (1-x) = \frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon(x) = x^2 \left(\frac{1}{3} + \varepsilon(x) \right),$

et $f(x) - (1-x) \geq 0$ pour x assez proche de 0, le graphe est au dessus de la tangente en $(0,1)$. #