

---

## Examen Math 151R Durée 2h.

Documents et calculatrices interdits  
Téléphones portables éteints et rangés dans les sacs

---

Le 10 Janvier 2022.

**Exercice 1.** 1) Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions

$$\ln(1 + 2x) - 2 \sin x, \quad 1 - e^x + \sin x.$$

2) En déduire la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2 \sin x}{1 - e^x + \sin x}.$$

**Exercice 2.** On considère la courbe paramétrée définie par

$$M(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in \mathbb{R} \text{ avec } \begin{cases} x(t) = t^3 - 3t, \\ y(t) = \frac{t^4}{4} - t^2 + 1. \end{cases}$$

1) Quelle transformation simple de  $\mathbb{R}^2$  envoie  $M(t)$  sur  $M(-t)$ ? En déduire une symétrie de la courbe  $C$ .

2) Déterminer le vecteur vitesse  $M'(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Pour quelles valeurs de  $t$   $M'(t)$  est-il vertical? horizontal?

3) Dresser le tableau de variation conjoint de  $x(t)$  et  $y(t)$  quand  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$  (préciser les limites en  $\pm\infty$ ).

4) Quel est le vecteur vitesse au temps  $t = 2$ ? Donner une équation cartésienne de la tangente  $T$  à la courbe au point  $M(2)$ .

5) Tracer la courbe image  $C = \{M(t) : t \in [-1, 1]\}$  pour  $t \in [-1, 1]$ .

**Exercice 3.** On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = \sin t.$$

1) Résoudre l'équation homogène associée.

2) Résoudre l'équation (E). On cherchera d'abord une solution particulière de (E).

3) Question bonus : déterminer l'unique solution de (E) telle que  $x(0) = x'(0) = 0$ .

**Exercice 4.** Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{4} \cos x.$$

1) Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  pour  $x \in ]0, 2[$ .

2) Montrer que  $|f''(x)| \leq \frac{9}{4}$  pour tout  $x \in ]0, 2[$ .

3) Montrer que  $f(x) \leq \frac{3}{4} - 2x + \frac{9}{8}x^2$ , pour tout  $x \in ]0, 2[$ . En déduire que  $f(1) < 0$ .

4) Montrer que la fonction  $f$  s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ . On énoncera soigneusement le théorème utilisé.

5) En déduire que  $f'$  s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $]0, 2[$ . On énoncera soigneusement le théorème utilisé.