

---

**Examen Math 151R**  
**Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.**  
**Téléphones éteints et rangés dans les sacs.**  
**Ecrire son nom de manière lisible sur chaque copie.**  
**Numéroter chaque copie, ne pas la cacheter.**

---

Le 5 Janvier 2021.

**Exercice 1.** On considère la courbe paramétrée définie par

$$M(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in \mathbb{R} \text{ avec } \begin{cases} x(t) = t^3 - 3t, \\ y(t) = \frac{t^4}{4} - t^2 + 1. \end{cases}$$

- 1) Quelle transformation simple envoie  $M(t)$  sur  $M(-t)$  ?
- 2) Déterminer le vecteur vitesse  $M'(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Pour quelles valeurs de  $t$   $M'(t)$  est-il vertical ? horizontal ?
- 3) Dresser le tableau de variation conjoint de  $x(t)$  et  $y(t)$  quand  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$  (préciser les limites en  $\pm\infty$ ).
- 4) a) Quel est le vecteur vitesse au temps  $t = 2$  ? Donner une équation cartésienne de la tangente  $T$  à la courbe au point  $M(2)$ .  
b) Calculer, à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, le DL à l'ordre 2 de la fonction

$$f(t) = y(t) - \frac{4}{9}x(t) - \frac{1}{9},$$

en  $t = 2$ . En déduire la position de la courbe décrite par  $M(t)$  par rapport à la tangente  $T$  au point  $M(2)$  pour  $t$  proche de 2.

- 5) Tracer la courbe image  $C = \{M(t) : t \in [-1, 1]\}$  pour  $t \in [-1, 1]$ .
- 6) (**Question bonus**) Etudier les branches infinies.

**Exercice 2.** Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx.$$

*Indication : faire deux intégrations par parties successives.*

**Exercice 3.** Soit  $f : ]-\frac{1}{2}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$ .

- 1) Calculer  $f', f'', f'''$ . Montrer que

$$0 \leq f'''(x) \leq 3, \quad \text{pour } x \in [0, +\infty[.$$

- 2) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en  $x = 0$ .
- 3) En déduire que

$$-1 + x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

**Exercice 4.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

- 1) Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
- 2) Déterminer les points critiques de la fonction  $f$ .