

Exercice 1

1) on a $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$, soit $= t + t^2 \varepsilon(t)$

donc $\ln(1+2x) - 2\sin x = 2x - 2x^2 + 2x + x^2 \varepsilon(x) = -2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$, donc

$1 - e^x + \sin x = 1 - (1 + x + \frac{x^2}{2}) + x + x^2 \varepsilon(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$

2) On a $f(x) = \frac{\ln(1+2x) - 2\sin x}{1 - e^x + \sin x} = \frac{-2x^2 + x^2 \varepsilon(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)} = \frac{-2 + \varepsilon(x)}{-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}$,

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4.$

Exercice 2.

1) on a $M(t) = (-(t^3 - 3t), \frac{t^4}{4} - t^2 + 1) = S(M(t))$ ou $S(x, y) = (-x, y)$,
S est la symétrie par rapport à l'axe Oy. C est symétrique par rapport à Oy.

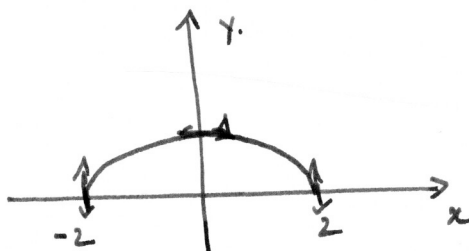
2) on a $M'(t) = (3t^2 - 3, t^3 - 2t)$. $M'(t)$ est vertical si $3t^2 - 3 = 0$ donc $t = 1$ ou $t = -1$.
 $M'(t)$ est horizontal si $t^3 - 2t = 0$ donc $t = 0$, ou $t = \sqrt{2}$, ou $t = -\sqrt{2}$.

3)

t	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x'(t)$		+	0	-	0	+	
$x(t)$	$-\infty$	\nearrow	2	\circ	\searrow	-2	$\nearrow +\infty$
$y'(t)$	-	+	+	-	-	+	
$y(t)$	$+\infty$	\searrow		1	\swarrow	1/4	$\searrow +\infty$

4) $M'(2) = (9, 4)$. la tangente à la courbe au point $M(2)$ a l'équation cartésienne:
 $-4(x-2) + 9(y-1) = 0$ (car $M(2) = (2, 1)$ et le vecteur directeur de T est $(9, 4)$).

5)



(C est symétrique / Oy)

Exercice 3.

(2)

- 1) on résout (H) $x'' - 4x' + 5x = 0$. Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 5$, de racines $2+i, 2-i$.

La solution générale de (H) est $x(t) = C_+ e^{2t} \cos t + C_- e^{2t} \sin t$, $C_+, C_- \in \mathbb{R}$.

- 2) Le second membre s'écrit et associe à la fréquence complexe " $\lambda + i\omega$ " égale à i , qui n'est pas racine de $P(\lambda)$. On utilise que $\sin t = \text{Im}(e^{it})$,

on cherche une solution particulière $z(t)$ de $z'' - 4z' + 5z = e^{it}$, sous

la forme $z(t) = C e^{it}$, on obtient $C(i^2 - 4i + 5) = 1$, donc

$$C = \frac{1}{4-4i} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-i} = \frac{1}{8} (1+i).$$

La solution particulière de (E) est $x_1(t) = \mathbb{R} \cdot \text{Im}(z(t)) =$

$$\frac{1}{8} \text{Im}((1+i)e^{it}) = \frac{1}{8} (\cos t + \sin t).$$

La solution générale de (E) est:

$$x(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t + \frac{1}{8} (\cos t + \sin t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc: $C_1 = -1/8, C_2 = 1/8$.

Exercice 4.

1) $f'(x) = 2x - 2 + \frac{1}{4} \sin x$, $f''(x) = 2 + \frac{1}{4} \cos x$.

2) $|f''(x)| \leq 2 + \frac{1}{4} |\cos x| \leq 2 + 1/4 = 9/4$.

- 3) On applique le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x=0$:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta(x)), \quad \theta(x) \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

$$= \frac{3}{4} - 2x + \frac{x^2}{2} f''(\theta(x)) \leq \frac{3}{4} - 2x + \frac{9x^2}{8} \text{ car } f''(x) \leq 9/4 \quad \forall x.$$

On a donc $f(1) \leq 3/4 - 2 + 9/8 = -1/8 < 0$.

- 4) Par le T.V.I. f s'annule une fois sur $]0, 1[$ car $f(0) = 3/4 > 0$, $f(1) < 0$ et une fois sur $]1, 2[$ car $f(2) = 1 - \frac{1}{4} \cos 2 \geq 3/4 > 0$ et $f(1) < 0$.

- 5) Par le théorème de Rolle entre $a \in]0, 1[$, $b \in]1, 2[$ avec $f(a) = f(b) = 0$, f' s'annule entre a et b donc f' s'annule sur $]0, 2[$.