

Exercice 1

1) $M(t+2\pi) = M(t)$ donc $M(t)$ est 2π -périodique, on se contente d'étudier $M(t)$ pour t dans un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$.

2) On a $M(t) = -M(t)$ $M(-t)$ est la symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine. On se contente d'étudier sur $[0, \pi]$, puis on complète par symétrie par rapport à l'origine.

$\sin(2(\pi-t)) = \sin(-2t) = -\sin 2t$, $\sin(3(\pi-t)) = \sin(\pi-3t) = \sin(3t)$,
donc $M(\pi-t)$ est la symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe Oy .
On étudie pour $t \in [0, \pi/2]$, on complète par symétrie par rapport à Oy .

3) on a $x'(t) = 2\cos 2t$, $y'(t) = 3\cos 3t$, on obtient le tableau.

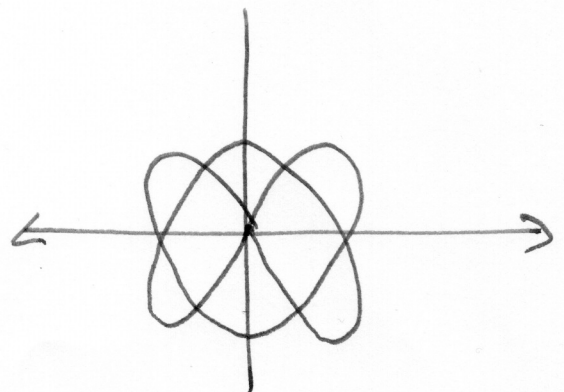
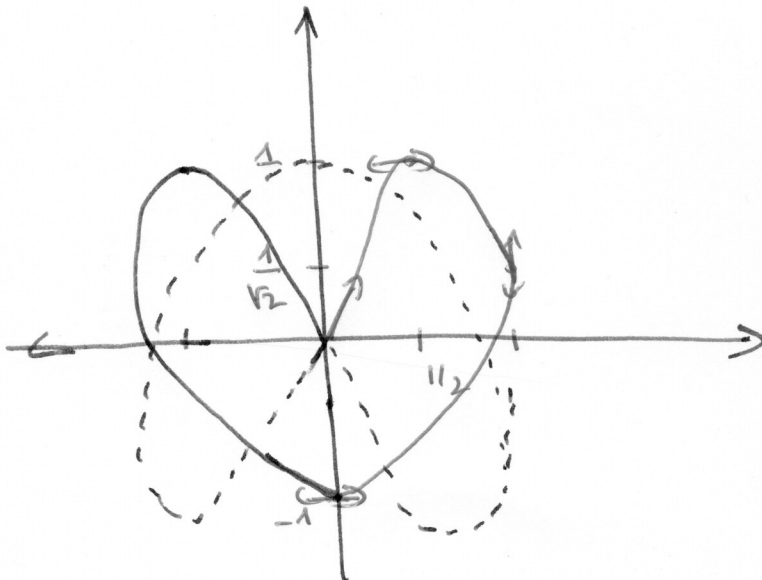
t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
$x(t)$	2	+	0	-
$x(t)$	0	$\nearrow \frac{1}{2} \rightarrow 1$		$\rightarrow 0$
$y'(t)$	3	+	0	-
$y(t)$	0	$\nearrow 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$		$\rightarrow -1$

4) La tangente à γ est horizontale si $y'(t) = 0$ (et $x'(t) \neq 0$) donc pour $t = \pi/6, \pi/2$ $M(\pi/6) = (1/2, 1)$, $M(\pi/2) = (0, -1)$.

Elle est verticale si $x'(t) = 0$ (et $y'(t) \neq 0$) donc pour $t = \pi/4$,

$$M(\pi/4) = (1, 1/\sqrt{2}).$$

5)



Exercice 2

(2)

1) on applique le accroissement finis à $f(x) = \ln x$ entre $a=x$ et $b=1+x$.

On obtient $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$ entre a et b .

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad c \text{ est entre } x \text{ et } 1+x \text{ donc } \frac{1}{1+x} < f'(c) < \frac{1}{x}.$$

$$\text{On obtient bien } \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2) On en déduit que $\frac{\sqrt{x}}{1+x} < \sqrt{x} (\ln(1+x) - \ln x) < \frac{\sqrt{x}}{x}$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\ln(1+x) - \ln x) = 0.$$

$$\text{De même } \frac{x}{1+x} < x (\ln(1+x) - \ln x) < 1 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(1+x) - \ln x) = 1.$$

$$3) \text{ On a } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^{x \ln(\frac{x+1}{x})} = e^{x (\ln(x+1) - \ln x)}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exercice 3.

$$1) f'(x) = -\frac{1}{3}(1+x)^{-4/3}, \quad f''(x) = \frac{4}{9}(1+x)^{-7/3}, \quad f'''(x) = -\frac{28}{27}(1+x)^{-10/3}.$$

2) la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et x donne:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14x^3}{81} (1+c(x))^{-10/3} \quad c(x) \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

$$\text{Pour } x > 0, \text{ on a } c(x) > 0 \text{ et donc } 0 < (1+c(x))^{-10/3} < 1.$$

On obtient $-\frac{14}{81}x^3 < f(x) - (1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2) < 0$, ce qui est le résultat demandé.

Exercice 4

1) On résout l'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$.

$$\Delta = 4 - 40 = -36 \quad \pm \sqrt{\Delta} = \pm 6i, \text{ les racines sont}$$

$-1 \pm 3i$. la solution générale de (H) est

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos 3t + C_2 e^{-t} \sin 3t.$$

2) l'exposant " $\lambda + i\omega$ " correspondant au second membre $7e^t$ est $\lambda = 1, \omega = 0$ donc $\lambda + i\omega = 1$, qui n'est pas racine de $P(\lambda)$.
On cherche une solution particulière sous la forme $x(t) = Ce^t$ on obtient $C(1+2+10) = 7 \quad C = 7/13$.

la sol. générale de (E) est:

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos 3t + C_2 e^{-t} \sin 3t + 7/13 e^t$$

3) on a $x'(t) = -C_1 e^{-t} \cos 3t - C_2 e^{-t} \sin 3t - 3C_1 e^{-t} \sin 3t + 3C_2 e^{-t} \cos 3t + 7/13 e^t$, dnc

$x(0) = C_1 + 7/13, \quad x'(0) = -C_1 + 3C_2 + 7/13$, on obtient le système:

$$\begin{cases} C_1 + 7/13 = 1 \\ -C_1 + 3C_2 + 7/13 = 0 \end{cases} \quad \text{dnc } C_1 = 6/13, \quad C_2 = -\frac{1}{39}.$$

Exercice 5.

on pose $u(x) = 2x+1, v'(x) = e^x$, dnc $u(x) = 2, v(x) = e^x$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2x+1) e^x dx = \left[(2x+1) e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \\ &= \left[(2x+1) e^x \right]_0^1 - \left[2e^x \right]_0^1 = e + 1. \end{aligned}$$