

Exercice 1

1) DL en 0 à l'ordre 2:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x),$$

$$\sinh x = x + x^2 \varepsilon(x),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

2) On a donc $\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x),$

$$\sinh x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \text{ et:}$$

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_2(x)} = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)} \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Exercice 2

1) on peut supposer que $C = \sup(B) \geq \sup(A)$ (sinon échanger A et B)

Pour tout $x \in B$ on a $x \leq C$, pour tout $x \in A$

on a $x \leq \sup(A) \leq C$ donc C est un majorant

de $A \cup B$. Or $C = \sup(B)$, il existe une suite (x_n)

avec $x_n \in B$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$, comme $x_n \in A \cup B$,

on en déduit que $C = \sup(A \cup B)$.

2) On écrit $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \geq 1 \text{ pair} \right\}$

$$A_2 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \geq 1 \text{ impair} \right\}. \text{ On a } A_1 = \left\{ 1 + \frac{1}{2n} : n \geq 1 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ -1 + \frac{1}{2n+1} : n \geq 0 \right\}$$

On a $A_1 \subset \left[0, \frac{3}{2} \right]$, $A_2 \subset [-1, 0]$ donc A_1, A_2

sont majorés et minorés.

$$\frac{3}{2} \in A_1 \text{ donc } \frac{3}{2} = \max A_1 = \sup A_1, \text{ et } \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{donc } 0 = \inf A_1.$$

$$0 \in A_2 \text{ (n=0) donc } 0 = \max A_2 = \sup A_2 \text{ et } -1 + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$$

$$\text{donc } -1 = \inf A_2.$$

En appliquant 1) (avec sa version pour inf

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)) \text{) on}$$

obtient:

$$\sup A = \frac{3}{2}, \inf A = -1$$

Exercice 3

On calcule le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4(3+i)$
 $= -3 - 4i$, on cherche les 2 racines carrées de Δ ,
sous la forme $z = x+iy$. On obtient

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = |-3-4i| = 5 \end{cases} \quad \text{On a donc} \quad \begin{cases} x^2 = 1, y^2 = 4 \\ \text{et } xy < 0 \text{ ce qui donne} \end{cases}$$

les 2 racines carrées $\pm (1-2i)$. les 2 solutions sont

$$z = \frac{3 \pm (1-2i)}{2} = \boxed{2-i, 1+i} \quad \#$$

Exercice 4

1) On cherche z sous la forme $z = x+iy$, on obtient

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = |1+i| = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{donc } z = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$$

2) on a $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ donc les 2 racines carrées de

$$1+i \text{ sont } \pm 2^{1/4} e^{i\pi/8} = \pm 2^{1/4} (\cos \pi/8 + i \sin \pi/8)$$

$$\text{On obtient : } 2^{1/4} \cos \pi/8 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \quad 2^{1/4} \sin \pi/8 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

donc

$$\cos \pi/8 = \frac{1}{2^{3/4}} \sqrt{\sqrt{2}+1}, \quad \sin \pi/8 = \frac{1}{2^{3/4}} \sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Exercice 5

1) $f(x)$ est définie si $1-x^2 \geq 0$ et $x \neq 0$,
est nulle si $x \in [-1, 1]$ et $x \neq 0$, donc

$$\underline{Df = [-1, 0[\cup]0, 1]}. \quad \#$$

2) On a une fonction définie en $\frac{0}{0}$, on utilise les DL

$$\text{on a } \sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + u\varepsilon(u) \text{ donc}$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad (\text{remplacer } u \text{ par } x^2),$$

$$f(x) = \frac{-x^2/2 + x^2\varepsilon(x)}{x} = -x/2 + x\varepsilon(x),$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \text{ on pose } f(0) = 0.$$

3) pour $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$ on calcule $f'(x)$ directement :

$$\text{si } u(x) = \sqrt{1-x^2} - 1 = (1-x^2)^{1/2} - 1, \text{ on a}$$

$$u'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = -x(1-x^2)^{-1/2},$$

$$f'(x) = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2} \right)$$

$$= \frac{-x^2(1-x^2)^{-1/2} - (1-x^2)^{1/2} + 1}{x^2}$$

$$= \frac{(1-x^2)^{-1/2}(-x^2 - (1-x^2)) + 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - (1-x^2)^{-1/2}}{x^2}.$$

Pour montrer que f est dérivable en $x=0$, on utilise le DL calculé en 1) :

$f(x) = -\frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$, comme $f(0)=0$,
on en déduit que f est dérivable en 0 avec

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$