

---

**Partiel Math 151R Durée 2h.**  
Documents et calculatrices interdits  
Téléphones portables éteints et rangés dans les sacs

---

Le 28 Octobre 2021.

**Exercice 1.**

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - z + (1 + i) = 0$ .
- 2) En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^6 - z^3 + (1 + i) = 0$ .

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction réelle de variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-4}.$$

- 1) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Résoudre sur  $D_f$  l'inéquation  $f(x) \geq 1$ .

**Exercice 3.** Soient  $a, b \in \mathbb{N}$  avec  $a > b$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

---

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a^n - b^n)a + b^n(a - b).$$

- 2) Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \geq 1$   $a - b$  divise  $a^n - b^n$ .

**Exercice 4.** Soit

$$A = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q} : p, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Montrer que  $A$  admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

**Exercice 5.** Déterminer en justifiant votre réponse les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $A = \{x \in [0, 1] \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq x \leq 1\},$
- 2)  $B = \{x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}.$

**Exercice 6.**

- 1) Quel est le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}?$$

Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?

- 2) Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x).$$

- 3) **Question bonus** La fonction

$$x \mapsto \frac{x}{|x| + \sin x}$$

a-t-elle une limite en 0 ?