

Exercice 1

1) On a $-x(t) = x(-t)$, $y(t) = y(-t)$. $M(-t)$ est l'image de $M(t)$ par la transformation $S: (x, y) \mapsto (-x, y)$, c'est à dire la symétrie par rapport à l'axe Oy .

2) On a $M'(t) = (3t^2 - 3, t^3 - 2t)$.

$M'(t)$ est vertical si $x'(t) = 0$ i.e. $t = \pm 1$.

$M'(t)$ est horizontal si $y'(t) = 0$ i.e. $t = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

3) On a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \pm\infty$.

t	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x'(t)$	+	+	0	-	-	0	+
$x(t)$	$-\infty$						$+\infty$
$y'(t)$	-	+	+	-	-	+	+
$y(t)$	$+\infty$			0			$+\infty$

on a: $M(-\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 0)$, $M(\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, 0)$

$M(-1) = (2, 1/4)$ $M(1) = (-2, 1/4)$ $M(0) = (0, 1)$.

4) après $M'(2) = (3, 4)$. la pente de la tangente est $\frac{4}{3}$

$M(2) = (2, 1)$. la tangente est : T: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

4b). On considère $f(t) = y(t) - \frac{4}{3}x(t) - \frac{1}{3} = y(t) - \frac{4}{3}x(t) - \frac{1}{3}$, et on fait un

DL à l'ordre 2 de $f(t)$ à $t=2$. On a $f(2) = f'(2) = 0$ par construction

$$\text{et } f''(t) = y''(t) - \frac{4}{3}x''(t) = 3t^2 - 2 - \frac{4}{3}(6t) = 3t^2 - 8t - 2$$

$$f''(2) = 3 \times 4 - 16 - 2 = 10 - \frac{16}{3} = \frac{14}{3} > 0.$$

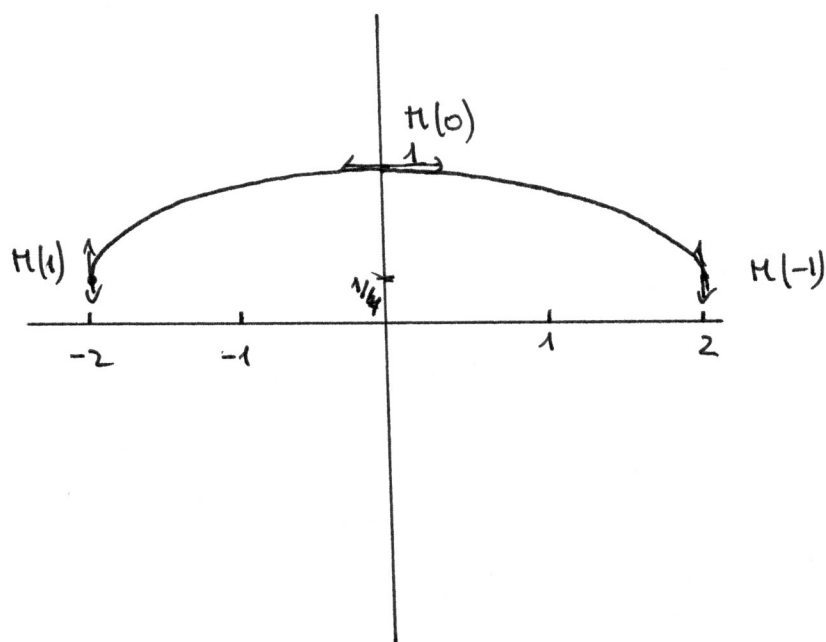
Donc la courbe est en dessus de la tangente en $M(2)$.

5). On a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \pm\infty$, on a des branches infinies en $t = \pm\infty$.

$$\text{On calcule } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{t^4}{4} - t^2 + 1}{t^3 - 3t} = \pm\infty.$$

Donc C est une branche parabolique d'axe Oy en $+\infty$ et $-\infty$.

6)



Exercice 2

1^{ère} intégration par parties:

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v} dx = \left[\underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} dx.$$

2^{ème} intégration par parties:

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos x}_{v} dx = \left[\underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{-\sin x}_{v'} dx.$$

On obtient:

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \left(\left[e^x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx \right)$$

$$\text{donc } 2I = \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\pi/2} = e^{\pi/2} + 1. \quad I = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} + 1).$$

Exercice 3

1) la formule de Taylor-Lagrange en $x=0$ à l'ordre 2 s'écrit

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c(x)) + \frac{x^3}{6} f'''(c(x)) \quad \text{pour } c(x) \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

$$\text{On a } f'(x) = (1+2x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2} \times 2 (1+2x)^{-3/2} = -(1+2x)^{-3/2}.$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2} \times 2 (1+2x)^{-5/2} = 3(1+2x)^{-5/2}.$$

Pour $x \geq 0$ on a $1 \leq 1+2x$ donc $0 < (1+2x)^{-5/2} \leq 1$ et

$$0 \leq f''(x) \leq 3.$$

On a $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$. Si $0 \leq c(x) \leq x$ on a

$$0 \leq f'''(c(x)) \leq 3 \text{ et donc :}$$

$$0 \leq f(x) - f(0) - x f'(0) - \frac{x^2}{2} f''(0) = \frac{x^3}{6} f'''(c(x)) \leq \frac{x^3}{6} \times 3$$

donc

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} \text{ pour } x \geq 0.$$

Exercice 4

$$1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2xxy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2yxy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

2) points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^2(y^2 - x^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2yx^3 = 0.$$

La 2^{ème} équation donne $y = 0$ ou $x = 0$.

Si $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^4 > 0$ si $y \neq 0$.

les points critiques sont les points $(x, 0)$ $x \in \mathbb{R}$.