

---

**Examen de rattrapage de Math 151R**  
**Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.**  
**Téléphones éteints et rangés dans les sacs.**  
**Ecrire son nom de manière lisible sur chaque copie.**  
**Numéroter chaque copie, ne pas la cacheter.**

---

Le 17 Juin 2021.

**Exercice 1.** Dessiner les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2x^2\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\}.$$

**Exercice 2.**

- 1) Montrer que le polynôme du second degré  $x^2 - 3x + 5$  reste  $> 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- 2) En déduire la position relative de la parabole d'équation  $y = x^2 + 5$  et de la droite d'équation  $y = 3x$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) La fonction  $f$  est-elle continue ?
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
*Indication : traiter séparément le cas  $x = 0$ .*

**Exercice 4.** On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = e^t.$$

- 1) Résoudre l'équation homogène associée.
- 2) Résoudre l'équation (E).

**Exercice 5.** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) dx.$$

*Indication : intégrer par parties.*

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$ .

- 1) Calculer le gradient  $\vec{\nabla} f(x, y)$ .
- 2) Déterminer les points critiques de  $f$ .