

NOTES DE COURS DE PCDD101
version du 13 août 2024
Christian Gérard
christian.gerard@math.u-psud.fr

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	3
2. Quelques notions de logique et de théorie des ensembles	3
2.1. Ensembles	3
2.2. Inclusion, union, intersection, complémentaire	3
2.3. Produit cartésien	4
2.4. Assertions	4
2.5. Opérateurs logiques	4
2.6. Quantificateurs	4
2.7. Méthodes classiques de raisonnement	5
3. Rappels sur $\mathbb{R}$	6
3.1. Borne supérieure, borne inférieure	7
3.2. Intervalles	8
4. Distance et produit scalaire	9
4.1. Valeur absolue, inégalité triangulaire	9
4.2. Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}^n$	9
4.3. Droites dans $\mathbb{R}^2$	11
5. Rappels sur $\mathbb{C}$	12
5.1. Construction des nombres complexes	12
5.2. Exponentielle complexe	13
5.3. Equations du second degré	14
6. Fonctions et graphes	16
6.1. Injections, surjections, bijections	16
6.2. Domaine de définition naturel	17
6.3. Restriction, image, image inverse	18
6.4. Fonctions bornées	18
6.5. Fonctions monotones	18
6.6. Graphes	18
6.7. Surgraphe, sousgraphe	19
6.8. Action des translations sur les graphes	20
6.9. Action des symétries sur les graphes	21
7. Limites et continuité	21
7.1. Voisinage d'un point	21
7.2. Limites	22
7.3. Unicité de la limite	24
7.4. Opérations sur les fonctions	24
7.5. Limites et inégalités	26
7.6. Continuité	27

7.7.	Comment fabriquer des fonctions continues	28
7.8.	Limites classiques	29
8.	Développements limités et dérivées	29
8.1.	Développements limités	29
8.2.	Unicité du DL	31
8.3.	Applications des DL	32
8.4.	Quelques DL classiques	33
8.5.	Opérations sur les DL	33
8.6.	Composition des DL	35
8.7.	Dérivée d'une fonction	36
8.8.	Opérations sur les dérivées	37
9.	Courbes paramétrées	38
9.1.	Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$	38
9.2.	Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$	40
9.3.	Courbes paramétrées	40
9.4.	Asymptotes	42
9.5.	Symétries	43
10.	Propriétés globales des fonctions continues	44
10.1.	Théorème des valeurs intermédiaires	44
10.2.	Théorème de Weierstrass	46
11.	Propriétés des fonctions dérivables	47
11.1.	Extremes locaux et principe de Fermat	47
11.2.	Théorème des accroissements finis	48
11.3.	Formule de Taylor-Lagrange	49
11.4.	Les fonctions exponentielle, sinus et cosinus	51
11.5.	Nature des points critiques	53
12.	Equations différentielles	53
12.1.	Equations d'ordre 1	54
12.2.	Solutions complexes	55
12.3.	Equations d'ordre 2 à coefficients constants	55
13.	Intégrales et primitives	58
13.1.	L'intégrale de Riemann	58
13.2.	Primitives	61
13.3.	Théorème fondamental du calcul intégral	62
13.4.	Intégration par parties	63
13.5.	Changement de variables	63
13.6.	Longueur d'une courbe paramétrée	64
14.	Fonctions de plusieurs variables	64
14.1.	Définitions	64
14.2.	Fonctions de n variables	64
14.3.	Lignes de niveau	65
14.4.	Fonctions partielles, dérivées partielles	65
14.5.	Limites et continuité	66
14.6.	Opérations sur les fonctions continues	66
14.7.	Formule de Taylor à l'ordre 1	67
14.8.	Applications	68

1. INTRODUCTION

Le but de ces notes est de servir de *support* au cours en amphi et non de le remplacer, leur style volontairement laconique les rendant peu appropriées à cet usage. Les étudiants trouveront ici les énoncés stables et les démonstrations des résultats décrits en amphi.

2. QUELQUES NOTIONS DE LOGIQUE ET DE THÉORIE DES ENSEMBLES

2.1. Ensembles. Un ensemble est une collection d'éléments, comme par exemple $\{0, 1\}$, $\{\sqrt{2}, -1, \frac{1}{2}\}$, $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$.

Il est utile d'accepter comme ensemble l'*ensemble vide* $\emptyset$, qui est l'ensemble ne contenant aucun élément. L'ensemble vide joue pour la théorie des ensembles un rôle analogue au nombre 0 pour les entiers. Si E est un ensemble, on note

$$x \in E$$

si x est un élément de E et $x \notin E$ dans le cas contraire. Il ne faut pas confondre x qui est un élément et $\{x\}$, ensemble appelé *singleton*, qui a x comme unique élément.

Les ensembles introduits plus haut, sont définis 'en extension', c'est à dire en énumérant bêtement tous leurs éléments. Il est souvent plus simple de définir un ensemble 'en compréhension', c'est à dire en précisant la ou les propriétés qui caractérise ses éléments. Par exemple on peut définir les ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\} (=]1, 3[),$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : z^5 = 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x \leq 1\} (= [0, 1]).$$

2.2. Inclusion, union, intersection, complémentaire.

Définition 2.1. Soit E, F deux ensembles.

- (1) on écrit $F \subset E$ (F est inclus dans E ou encore F est un sous-ensemble de E) si tout élément de F appartient à E .
- (2) la réunion de E et F , notée $E \cup F$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F .
- (3) l'intersection de E et F , notée $E \cap F$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E et à F .
- (4) le complémentaire de F dans E , noté $E \setminus F$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F .

Très souvent les ensembles que l'on considère sont des sous ensembles d'un ensemble E fixé, par exemple l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Dans ce cas on note $E \setminus F$ simplement par F^c .

On définit de la même façon l'union ou l'intersection d'une famille (finie ou infinie) d'ensembles. On utilise la même notation que pour des sommes de nombres, ce qui conduit aux notations évidentes suivantes :

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^n E_i,$$

et de même pour l'intersection.

2.3. Produit cartésien. Si E, F sont deux ensembles, on note par $E \times F$ le *produit cartésien* de E et F , qui est l'ensemble des *couples* (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$. L'exemple typique est

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Il faut prendre garde à distinguer le couple (e, f) , élément de $E \times F$ et la paire $\{e, f\}$, qui est un sous ensemble de $E \cup F$. Par exemple $(1, 2) \neq (2, 1)$ alors que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

A nouveau on peut définir le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, aussi noté $\prod_{i=1}^n E_i$. Le seul exemple qu'on utilisera un peu est

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

2.4. Assertions. Une *assertion* est une affirmation qui peut être soit vraie soit fausse, mais pas les deux en même temps. Par exemple :

- « il pleut. »
- « $2 + 2 = 4$ »
- « $2 \times 3 = 7$ »
- « pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$. »
- « pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|z| = 1$. »

sont des assertions.

2.5. Opérateurs logiques.

Définition 2.2. Soit P, Q deux assertions.

- (1) l'assertion « non P » (aussi appelée la *négation* de P) est l'assertion qui est vraie si et seulement si P est fausse.
- (2) l'assertion « P et Q » est l'assertion qui est vraie si et seulement si les deux assertions P et Q sont vraies.
- (3) l'assertion « P ou Q » est l'assertion qui est vraie si et seulement si l'une au moins des deux assertions P et Q est vraie.

Définition 2.3. Soit P, Q deux assertions. L'assertion « (non P) ou Q » se note $P \Rightarrow Q$ et se lit « P implique Q ».

Supposons que P implique Q , c'est à dire que « (non P) ou Q » soit vraie. Ceci signifie que soit « non P » est vraie (et donc P est fausse), soit Q est vraie. En d'autres termes, si P est vraie, alors Q est vraie (mais P peut être fausse). Par exemple :

- « $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ » est vraie (prendre la racine carrée),
- « $x \in]-\infty, -4[\Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ » est vraie (étudier le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 3x - 4$),
- « $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ » est fausse (prendre $\theta = 2\pi$,
- « $2 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$ » est vraie (car « $2 + 2 = 5$ » est fausse).

Définition 2.4. Soit P, Q deux assertions. L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » est l'assertion « $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ » et se lit « P est équivalent à Q ».

2.6. Quantificateurs. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E , par exemple l'assertion « $x^2 \geq 1$ » (le paramètre x appartenant ici à l'ensemble $\mathbb{R}$).

Définition 2.5. L'assertion « $\forall x \in E P(x)$ » est l'assertion qui est vraie si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, .

L'assertion « $\exists x \in E P(x)$ » est l'assertion qui est vraie si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$.

Les symboles $\forall$ et $\exists$ s'appellent des *quantificateurs*, et se lisent respectivement "quelque soit" et "il existe".

Si l'assertion « $\exists x \in E P(x)$ » est vraie, il existe au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, mais il peut en exister plusieurs. Pour écrire qu'il existe un *unique* $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, on utilise le symbole $\exists!$, et on écrit

$$\exists! x \in E P(x).$$

Par exemple :

- « $\forall x \in [1, +\infty[x^2 \geq 1$ » est vraie,
- « $\forall x \in \mathbb{R} x^2 \geq 1$ » est fausse,
- « $\exists x \in \mathbb{R} x^2 \geq 1$ » est vraie,
- « $\forall n \in \mathbb{N} n(n+1)$ est pair » est vraie.

Il est possible de combiner plusieurs quantificateurs dans une assertion, mais l'ordre des quantificateurs est important. Par exemple l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x + y > 0 \text{ est vraie,}$$

mais l'assertion

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} x + y > 0 \text{ est fausse.}$$

L'assertion « $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue » (où I est un intervalle), s'écrit à l'aide de quantificateurs comme :

$$\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Il est facile d'écrire la négation d'une assertion contenant des quantificateurs. en effet

$$\text{la négation de } \forall x \in E P(x) \text{ est } \exists x \in E \text{ non } P(x),$$

$$\text{la négation de } \exists x \in E P(x) \text{ est } \forall x \in E \text{ non } P(x).$$

Les symboles $\exists$, $\forall$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ ne sont pas des abréviations et ne doivent donc pas s'utiliser dans une phrase en français. Par exemple, on n'écrit pas

« $\forall x$ réel, si $f(x) = 1 \Rightarrow x$ positif ou nul »

mais

« pour tout x réel, si $f(x) = 1$ alors x est positif ou nul »,

ou bien

$$\forall x \in \mathbb{R} (f(x) = 1 \Rightarrow x \geq 0).$$

2.7. Méthodes classiques de raisonnement. Supposons qu'on veuille montrer qu'une assertion P est vraie.

2.7.1. Raisonnement direct. On essaie de montrer que P est vraie directement. Par exemple si on veut montrer l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ On suppose que P est vraie (l'hypothèse est vérifiée), et on montre qu'alors Q est vraie (la conclusion est satisfaite). (noter que si P est fausse il n'y a rien à démontrer).

2.7.2. *Raisonnement par contraposée.* On vérifie facilement que

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P).$$

En langage humain, ceci signifie qu'il est équivalent de montrer que si P est vraie, alors Q est vraie, ou de montrer que si Q est fausse alors P est fausse. Reasonner par contraposée signifie montrer (par un raisonnement direct) que $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$, on en déduit donc que $P \Rightarrow Q$.

2.7.3. *Raisonnement par l'absurde.* Pour montrer que P est vraie, on suppose que P est fausse, et on en déduit une contradiction, par exemple que P est vraie ou qu'une autre assertion (que l'on sait fausse) est vraie.

2.7.4. *Raisonnement par récurrence.* Supposons qu'on veuille montrer $\forall n \geq n_0 P(n)$, où $P(n)$ est une assertion dépendant de l'entier n et n_0 est un entier fixé. Pour raisonner par récurrence on commence par montrer $P(n_0)$, puis on montre que $\forall n \geq n_0 (P(n) \rightarrow P(n+1))$.

Parfois on peut remplacer $\forall n \geq n_0 (P(n) \rightarrow P(n+1))$ par

$$\forall n \geq n_0 (\forall m \leq n P(m) \Rightarrow P(n+1)),$$

c'est à dire que pour tout $n \geq n_0$, si $P(m)$ est vraie pour tous les $m \leq n$, alors $P(n+1)$ est vraie. Ceci revient à faire le raisonnement par récurrence précédent en remplaçant l'assertion $P(n)$ par l'assertion $P'(n)$ égale à $\forall m \leq n P(m)$.

2.7.5. *Disjonction des cas.* Supposons qu'on veuille montrer l'assertion « $\forall x \in E P(x)$ », c'est à dire montrer que pour tous les x dans E l'assertion $P(x)$ est vraie.

Reasonner par disjonction des cas, c'est montrer d'abord que $P(x)$ est vraie pour tous les x dans une partie A de E , puis pour tous les x dans le complémentaire $E \setminus A$. Evidemment ceci n'a d'intérêt que si les raisonnements pour $x \in A$ et pour $x \notin A$ sont différents.

2.7.6. *Contre-exemple.* Supposons qu'on veuille montrer que l'assertion « $\forall x \in E P(x)$ » est fausse, c'est à dire que sa négation est vraie.

Sa négation est « $\exists x \in E \text{ non } P(x)$ », et pour montrer qu'elle est vraie il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse, ce qu'on appelle d'habitude trouver un *contre exemple* à l'assertion « $\forall x \in E P(x)$ ».

3. RAPPELS SUR $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas un fatras formé des nombres rationnels auxquels on ajoute, au fur et à mesure des besoins, de nouveaux nombres comme $\sqrt{2}, \pi$, etc. L'image de $\mathbb{R}$ à garder à l'esprit est celle de la *droite réelle*, une ligne droite infiniment étendue, sur laquelle on a marqué deux points, l'un correspondant au réel 0, l'autre au réel 1. On choisit ainsi une origine et une unité de longueur pour identifier les points de la droite avec des nombres.

On peut aussi voir un nombre réel comme l'idéalisation de la mesure d'une grandeur physique. Une grandeur physique, comme la longueur d'une tige de métal, ne se mesure qu'avec une certaine erreur, que l'on peut en théorie rendre de plus en plus petite en améliorant le procédé de mesure.

Cette image correspond exactement à la définition d' un nombre réel par une famille d' intervalles emboîtés, voir le Théorème 3.8.

Nous ne donnerons pas de construction rigoureuse de l' ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l' ensemble $\mathbb{Q}$ (les deux principales étant celle des coupures de Dedekind et celle reposant sur les suites de Cauchy de rationnels) mais nous rappelons les avantages importants de $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$, qui serviront dans toute la suite du cours.

3.1. Borne supérieure, borne inférieure.

3.1.1. Majorant, minorant.

Définition 3.1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un majorant resp. minorant de A si $a \leq m$ resp. $m \leq a$ pour tout $a \in A$. Un ensemble A qui admet un majorant resp. un minorant est dit majoré resp. minoré. Un ensemble majoré et minoré est dit borné.

En d' autres termes m est majorant de A resp. minorant ssi $A \subset]-\infty, m]$ resp. $A \subset [m, +\infty[$. $\mathbb{R}$ n' est donc ni majoré, ni minoré.

3.1.2. Maximum, minimum.

Définition 3.2. Soit $A \subset \mathbb{R}$. S' il existe un élément $a \in A$ tel que $a' \leq a$ resp. $a \leq a'$ pour tout $a' \in A$, on dit que a est le plus grand élément resp. le plus petit élément de A . On note $a = \max A$, resp. $\min A$, et on appelle aussi parfois a le maximum resp. minimum de A .

Si A admet un plus grand élément, alors $\max A$ est évidemment un majorant de A . L' intervalle $[0, 1[$ est borné, admet 0 comme plus petit élément, mais n' a pas de plus grand élément.

3.1.3. Borne supérieure, borne inférieure. La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est la suivante.

Théorème 3.3 (Propriété de la borne supérieure). Soit A un ensemble majoré resp. minoré. Alors l' ensemble des majorants resp. minorants de A admet un plus petit resp. plus grand élément, appelé la borne supérieure resp. borne inférieure de A , noté $\sup A$ resp. $\inf A$.

Voici comment vérifier qu' un nombre b est la borne supérieure resp. inférieure de A .

Proposition 3.4. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble majoré. Alors $b = \sup A$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) $a \leq b$ pour tout $a \in A$ (b est un majorant de A),
- (2) b est le plus petit des majorants de A , c' est à dire : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $a \in A$ avec $b - \epsilon < a$ ($b - \epsilon$ n' est pas un majorant de A).

Proposition 3.5. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble minoré. Alors $b = \inf A$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) $b \leq a$ pour tout $a \in A$ (b est un minorant de A),
- (2) b est le plus grand des minorants de A , c' est à dire : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $a \in A$ avec $a < b + \epsilon$ ($b + \epsilon$ n' est pas un minorant de A).

Remarque 3.6. On peut remplacer (2) par

(2') il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telle que $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Remarque 3.7. La propriété de la borne supérieure est fausse dans $\mathbb{Q}$. En effet soit

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x, x^2 \leq 2\}$$

si $x \geq 10$ alors $x^2 \geq 100$ et donc $x \notin A$. On a donc $A \subset]-\infty, 10]$ et donc A est majoré dans $\mathbb{Q}$.

Supposons que $b \in \mathbb{Q}$ est la borne supérieure de A et montrons que $b^2 = 2$. Supposons d'abord que $b^2 < 2$. Alors $(b+x)^2 = b^2 + 2bx + x^2 < 2$ pour $x \in \mathbb{Q}$ assez petit et donc $b+x \in A$ ce qui contredit le fait que b est un majorant de A .

Supposons maintenant que $b^2 > 2$. Comme b est le plus petit majorant de A , pour tout $\epsilon > 0$, $b - \epsilon$ n'est pas un majorant de A , c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $x \in A$ (dépendant de ϵ), avec $b - \epsilon < x$. On a donc $x^2 > (b - \epsilon)^2 = b^2 - 2b\epsilon + \epsilon^2$, et comme $b^2 > 2$ on a $x^2 > 2 - 2b\epsilon$. En prenant ϵ assez petit, on a donc $x^2 > 2$ ce qui contredit le fait que $x \in A$.

On a donc $b^2 = 2$. L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$. En effet si $b = \frac{p}{q}$ (où p, q ne sont pas tous les deux pairs, sinon on pourrait simplifier la fraction par 2) vérifie $b^2 = 2$, on a $p^2 = 2q^2$. Comme le carré d'un nombre impair est impair, p est pair, $p = 2k$ et donc $2q^2 = 4k^2$, $q^2 = 2k^2$ et donc q est pair, ce qui est une contradiction.

3.2. Intervalles. On rappelle la nomenclature usuelle des intervalles :

intervalles fermés bornés	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
intervalles ouverts bornés	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
intervalles semi-ouverts bornés	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
intervalles fermés non bornés	$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$ $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
intervalles ouverts non bornés	$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$ $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

Les intervalles fermés bornés sont souvent appelés *intervalles compacts*. Les adjectifs ouvert, fermé, compact font référence à des notions de topologie générale, vues d'habitude en L2.

On rappelle la propriété des *intervalles emboîtés*, qui est équivalente à celle de la borne supérieure.

Théorème 3.8 (propriété des intervalles emboîtés). Soit I_n pour $n \in \mathbb{N}$ une suite d'intervalles emboîtés, c'est à dire tels que $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $l(I_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, où $l(I)$ désigne la longueur de l'intervalle I . Alors il existe un unique nombre réel a tel que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}.$$

Si l'on se rappelle qu'une grandeur physique n'est mesurée qu'avec une précision finie, cette propriété correspond à une des images d'un nombre réel, comme l'idéalisation de la mesure d'une grandeur physique, avec une précision arbitrairement grande.

3.2.1. *Caractérisation des intervalles.* Voici une première conséquence importante de la propriété de la borne supérieure.

Proposition 3.9. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *A est un intervalle.*
- (2) *pour tous $\alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta \in A$, l' intervalle $[\alpha, \beta]$ est inclus dans A .*

Démonstration. L' implication 1) $\Rightarrow$ 2) est évidente. Montrons que 2) $\Rightarrow$ 1). Supposons d'abord que A est majoré et minoré et soit $a = \inf A, b = \sup A$. On a donc $A \subset [a, b]$. Soit maintenant $a < x < b$. Comme $x < b$ et que $b = \sup A$ il existe par la Proposition 3.5 $\beta \in A \cap [x, b]$. De même comme $a = \inf A$ il existe $\alpha \in A \cap [a, x]$. On a donc $x \in [\alpha, \beta] \subset A$ par la propriété 2). On a donc montré que $]a, b[\subset A$. Comme $A \subset [a, b]$, A doit être un des quatre intervalles d'extrémités a, b .

La preuve si A n'est pas minoré ou majoré est laissée en exercice. $\square$

4. DISTANCE ET PRODUIT SCALAIRE

4.1. **Valeur absolue, inégalité triangulaire.** On rappelle que $|x|$ désigne la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement l'inégalité triangulaire, donnée plus bas sous deux formes équivalentes.

Proposition 4.1. *On a*

- i) $|a + b| \leq |a| + |b|,$
- ii) $||a| - |b|| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

La preuve de l'équivalence entre i) et ii) est laissée en exercice.

4.1.1. *Distance.*

Définition 4.2. *La distance entre $a, b \in \mathbb{R}$ est définie comme*

$$d(a, b) := |a - b|.$$

Proposition 4.3. *On a :*

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(b, a), \forall a, b \in \mathbb{R}, \\ d(a, b) &= 0 \Leftrightarrow a = b, \\ d(a, b) &\leq d(a, c) + d(c, b), \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour $a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ on a

$$]a - \epsilon, a + \epsilon[= \{x \in \mathbb{R} : d(a, x) < \epsilon\}.$$

4.2. **Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}^n$.** On note par $x = (x_1, \dots, x_n)$ les points de $\mathbb{R}^n$, les cas les plus fréquents dans la suite étant $n = 2, 3$.

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, si l'on pose :

$$x + x' = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n), \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), x, x' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R},$$

le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ étant par définition $\vec{0} = (0, \dots, 0)$. On note souvent x par $\vec{x}$ si on veut souligner qu'on considère x comme un vecteur (et non comme un point) de $\mathbb{R}^n$. Si $a, b' \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\vec{ab} = (b_1 - a_1, \dots, b'_n - a_n).$$

4.2.1. *Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.*

Définition 4.4. Soit $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^n$. Le produit scalaire entre $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ est

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' := \sum_{i=1}^n x_i x'_i.$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes.

Lemme 4.5.

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 1) & \quad \vec{x} \cdot \vec{x}' = \vec{x}' \cdot \vec{x}, \\ 2) & \quad \vec{x} \cdot (\vec{x}' + \vec{x}'') = \vec{x} \cdot \vec{x}' + \vec{x} \cdot \vec{x}'', \quad (\vec{x}' + \vec{x}'') \cdot \vec{x} = \vec{x}' \cdot \vec{x} + \vec{x}'' \cdot \vec{x}, \\ 3) & \quad (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{x}' = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{x}') = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{x}'), \\ 4) & \quad \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0. \end{aligned}$$

L' inégalité suivante, appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz*, est fondamentale.

Proposition 4.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). On a

$$(4.2) \quad |\vec{x} \cdot \vec{x}'| \leq (\vec{x} \cdot \vec{x})^{\frac{1}{2}} (\vec{x}' \cdot \vec{x}')^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Fixons $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^n$ et posons pour $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = (\vec{x} + t\vec{x}') \cdot (\vec{x} + t\vec{x}') = t^2 \vec{x}' \cdot \vec{x}' + 2t\vec{x} \cdot \vec{x}' + \vec{x} \cdot \vec{x},$$

en utilisant (4.1). $P(t)$ est un polynôme en t de degré 2 avec $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il en suit que $P(t)$ ne peut pas avoir deux racines distinctes, donc son discriminant

$$\Delta = 4(\vec{x} \cdot \vec{x}')^2 - 4(\vec{x} \cdot \vec{x})(\vec{x}' \cdot \vec{x}'),$$

est négatif ou nul, ce qui entraîne (4.2).

4.2.2. *Norme associée au produit scalaire.* On associe à ce produit scalaire la *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\|\vec{x}\| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

qui s' interprète comme la longueur du vecteur $\vec{x}$. La distance euclidienne entre deux points $x, x' \in \mathbb{R}^n$ est

$$d(x, x') := \|x - x'\| = \|\vec{xx'}\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 4.7 (Inégalité triangulaire). On a

$$\begin{aligned} i) & \quad \|\vec{x} + \vec{x}'\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{x}'\| \\ ii) & \quad d(x, x') \leq d(x, x'') + d(x'', x'), \quad \forall x, x', x'' \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Démonstration. On a en utilisant (4.1), (4.2) :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{x}'\|^2 &= (\vec{x} + \vec{x}') \cdot (\vec{x} + \vec{x}') = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + \vec{x}' \cdot \vec{x}' = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + \|\vec{x}'\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{x}'\| + \|\vec{x}'\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{x}'\|)^2, \end{aligned}$$

ce qui montre *i)* en passant aux racines carrées. En remplaçant dans *i)* $\vec{x}$ par $x - x'' = \vec{x''x}$ et $\vec{x}'$ par $x'' - x' = \vec{x'x''}$ on obtient *ii)*. $\square$

4.2.3. *Orthogonalité.* On dit que deux vecteurs $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^n$ sont *orthogonaux* si $\vec{x} \cdot \vec{x}' = 0$, on écrit souvent $\vec{x} \perp \vec{x}'$. On déduit de la première ligne de (4.3) le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{x} + \vec{x}'\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{x}'\|^2 \text{ si et seulement si } \vec{x} \perp \vec{x}'.$$

4.3. Droites dans $\mathbb{R}^2$.

4.3.1. *Représentation paramétrique.* On peut définir une droite dans $\mathbb{R}^2$ par un point et un vecteur directeur. Si $a \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^2$ la droite passant par a de vecteur directeur $\vec{u}$ est définie comme :

$$D := \{x = a + t\vec{u} : t \in \mathbb{R}\}.$$

On obtient évidemment la même droite en remplaçant a par un autre point $a' \in D$ et $\vec{u}$ par un autre vecteur non nul $\vec{u}' = \lambda\vec{u}$ colinéaire à $\vec{u}$. Si D passe par deux points a, a' on peut prendre comme vecteur directeur le vecteur $\vec{aa'}$.

4.3.2. *Représentation cartésienne.* On peut aussi définir une droite D par son équation cartésienne. D s'écrit comme

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = c\},$$

$a_1, a_2, c \in \mathbb{R}$ et $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Une équation cartésienne équivalente de D est obtenue en remplaçant a_i, c par $\lambda a_i, \lambda c$ pour $\lambda \neq 0$.

4.3.3. *Lien entre les deux représentations.* Soit D la droite donnée par l'équation cartésienne

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c.$$

Fixons un point $b = (b_1, b_2) \in D$, par exemple $b = (ca_1^{-1}, 0)$ si $a_1 \neq 0$, $b = (0, a_2^{-1}c)$ si $a_2 \neq 0$. Alors

$$x \in D \Leftrightarrow \vec{bx} \perp \vec{a} \text{ où } \vec{a} = (a_1, a_2).$$

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{a}$, par exemple $\vec{u} = (-b, a)$ alors D est la droite qui passe par b de vecteur directeur $\vec{u}$.

Inversement soit D la droite passant par un point $b = (b_1, b_2)$, de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2)$. On choisit un vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2)$ orthogonal à $\vec{u}$, par exemple $\vec{a} = (-u_2, u_1)$. Pour $c = a_1b_1 + a_2b_2$, D est donnée par l'équation cartésienne

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c.$$

4.3.4. *Distance d'un point à une droite.* Soit D une droite dans $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$. La *distance* de a à D , notée $d(a, D)$ est la plus petite distance entre a et un point $x \in D$.

Proposition 4.8. *Soit D une droite dans $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$. On pose*

$$d(a, D) := \inf\{d(a, x) : x \in D\}$$

Il existe un unique point $x_a \in D$ tel que

$$d(a, x_a) \leq d(a, x), \quad \forall x \in D,$$

ou en d'autres termes

$$d(a, D) = \min\{d(a, x) : x \in D\}.$$

Ce point x_a est l'intersection de D et de la droite orthogonale à D passant par a .

Démonstration. Soit b un point de D et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D . On a donc

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = b + t\vec{u} : t \in \mathbb{R}\}.$$

On a pour $x = b + t\vec{u}$:

$$\begin{aligned} d(a, x)^2 &= \|t\vec{u} + b - a\|^2 = \|t\vec{u} - \vec{ab}\|^2 \\ &= t^2\|\vec{u}\|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{ab} + \|\vec{ab}\|^2 =: P(t) \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto P(t)$ est un polynôme de degré 2, qui tend vers $+\infty$ à l'infini. Son minimum sur $\mathbb{R}$ est atteint au point où $P'(t) = 2t\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{ab} = 0$, c'est à dire en

$$t = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{ab}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Ceci montre l'existence du point x_a avec

$$x_a = b - \frac{\vec{u} \cdot \vec{ab}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

On vérifie que $\vec{ax}_a$ est orthogonal à $\vec{u}$, c'est à dire que x_a est sur la droite orthogonale à D passant par a . $\square$

5. RAPPELS SUR $\mathbb{C}$

5.1. Construction des nombres complexes. On définit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme l'ensemble des expressions de la forme $z = a + ib$, pour $a, b \in \mathbb{R}$, a étant la *partie réelle* de z , notée $\text{Re}z$ et b la *partie imaginaire* de z , notée $\text{Im}z$. Cette écriture des nombres complexes est appelée *écriture cartésienne*.

Comme ensemble, $\mathbb{C}$ est donc égal à $\mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication, en posant

$$(5.1) \quad (a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b+b'), \quad (a+ib)(a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Si on identifie le réel a avec le nombre complexe $a + i0$, et si on note par i l'élément $0 + i1$, on vérifie que $i^2 = -1$. On a donc sans difficulté résolu dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 = -1$. On voit aussi que l'écriture cartésienne est bien adaptée à l'addition, mais moins adaptée à la multiplication.

On vérifie facilement que toutes les propriétés de $\mathbb{R}$ par rapport à l'addition et la multiplication sont encore vraies dans $\mathbb{C}$, c'est à dire que

$$\begin{aligned} z + z' &= z' + z, \quad zz' = z'z, \quad z(z' + z'') = zz' + zz'', \\ 0 + z &= z, \quad 1 \times z = z. \end{aligned}$$

Le nombre $a + i(-b)$, noté naturellement $a - ib$ est le *conjugué* de $z = a + ib$, noté $\bar{z}$. On vérifie que

$$\begin{aligned} \text{Re}z &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \text{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \\ z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z}, \\ \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}, \end{aligned}$$

et

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 =: |z|^2,$$

où $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le *module* de z , égal à la norme du vecteur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a donc

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z||z'|,$$

la première inégalité étant l'inégalité triangulaire.

Tout nombre complexe $z \neq 0$ possède un inverse z^{-1} donné par

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0.$$

5.1.1. *Absence de relation d'ordre naturelle.* Une des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ est l'existence d'un ordre : deux nombres réels a, b peuvent être comparés, et on a soit $a \leq b$ soit $b \leq a$. La relation d'ordre $\leq$ possède les propriétés bien connues par rapport à l'addition et à la multiplication, qui permettent la 'manipulation des inégalités'.

Rien de semblable n'existe sur $\mathbb{C}$. Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ (c'est à dire une façon de comparer deux nombres complexes), qui possède les mêmes propriétés que sur $\mathbb{R}$.

5.2. **Exponentielle complexe.** On pose

$$e^{it} := \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les formules de trigonométrie

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

entraînent que

$$e^{it} e^{is} = e^{i(t+s)}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

On pose ensuite

$$e^z := e^a e^{ib} = e^a \cos b + i e^a \sin b, \quad z = a + ib,$$

et on vérifie que

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad z, z' \in \mathbb{C}.$$

5.2.1. *Trigonométrie élémentaire.* On rappelle maintenant quelques formules de trigonométrie élémentaire, que l'on peut toutes déduire de $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et de $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

5.2.2. *Le cercle unité.* Le cercle unité $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ on a donc aussi

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

En identifiant deux nombres réels θ, θ' tels que $\theta - \theta' = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient l'ensemble $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ des réels modulo $2\pi\mathbb{Z}$. On peut identifier $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec $[0, 2\pi[$, ou avec $]-\pi, \pi]$, $[-\pi, \pi[$ etc. Tout nombre complexe z avec $|z| = 1$ s'écrit sous la forme $z = e^{i\theta}$, pour un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

5.2.3. *Représentation exponentielle.* Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme

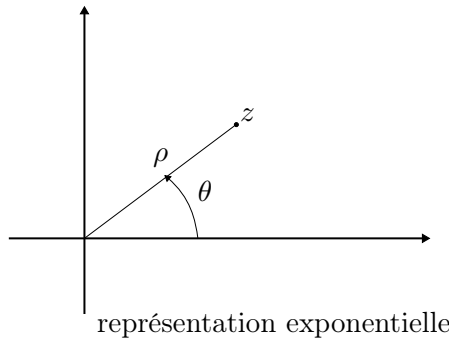
$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho = |z| \geq 0, \theta \in \mathbb{R},$$

appelée *écriture exponentielle*. Si $z = 0$, alors $\rho = 0$ et θ est quelconque. Si $z \neq 0$, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$, appelé l'*argument* de z .

L'écriture exponentielle est bien adaptée à la multiplication :

$$(\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')},$$

mais mal adaptée à l'addition.



5.3. Equations du second degré.

5.3.1. *Racines carrées d'un nombre complexe.*

Lemme 5.1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. L'équation

$$z^2 = z_0,$$

possède une seule solution $z = 0$ si $z_0 = 0$ et deux solutions si $z_0 \neq 0$. On notera l'ensemble de ces deux solutions sous la forme $\{\sqrt{z}, -\sqrt{z}\}$, qu'on appellera les racines carrées de z_0 .

Démonstration. Supposons d'abord que $z_0 = 0$. Si $z^2 = 0$ on a $|z^2| = |z|^2 = 0$ donc $z = 0$. Si $z_0 \neq 0$, on écrit $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, et on cherche z sous la forme $\rho e^{i\theta}$. On a donc

$$z^2 \rho^2 e^{i2\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0},$$

ce qui donne :

$$\rho^2 = \rho_0, \quad 2\theta = \theta_0 + 2k\pi,$$

et donc

$$\rho = \sqrt{\rho_0}, \theta = \frac{1}{2}\theta_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $e^{i\pi} = -1$, on obtient donc les deux solutions :

$$\sqrt{\rho_0}e^{i\theta_0/2}, \sqrt{\rho_0}e^{i\theta_0/2+i\pi} = -\sqrt{\rho_0}e^{i\theta_0/2}. \quad \square$$

La méthode utilisée dans la démonstration est bien adaptée si z_0 est sous forme exponentielle. Il est important de savoir aussi calculer les racines carrées de z_0 si z_0 est donné sous forme cartésienne $z_0 = a + ib$. On cherche alors z sous la forme $x + iy$ et l'équation $z^2 = z_0$ donne le système :

$$(5.2) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

On a d'autre part $|z|^2 = |z_0|$ ce qui donne l'équation auxiliaire :

$$(5.3) \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

En utilisant aussi la première équation de (5.2) on obtient donc :

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a),$$

où on remarque que par l'inégalité triangulaire, les membres de droite sont bien positifs. Ceci donne a priori deux solutions pour x et y :

$$(5.4) \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)},$$

soit quatre solutions pour $z = x + iy$. Si on utilise la deuxième équation de (5.2), on voit que $xy = 0$ si $b = 0$, et on voit bien que si $b = 0$ x ou y est nul dans (5.4). Si $b \neq 0$, alors xy est du signe de b , c'est à dire que x et y sont du même signe si $b > 0$, de signe contraire si $b < 0$. On obtient bien deux solutions pour $z = x + iy$.

5.3.2. Equations du second degré.

Proposition 5.2. *Les solutions de l'équation*

$$(5.5) \quad az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0,$$

sont données par

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

où $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ est le discriminant de l'équation et $\pm\sqrt{\Delta}$ désigne les deux racines complexes de Δ si $\Delta \neq 0$ et 0 si $\Delta = 0$.

Démonstration. On procède exactement comme dans le cas réel, en écrivant

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right),$$

et on obtient que z est solution de (5.5)

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \quad \square$$

6. FONCTIONS ET GRAPHS

Définition 6.1. Soient A, B deux ensembles. Une fonction f de A dans B est la donnée, pour chaque $a \in A$, d'un unique élément de B , noté $f(a)$. L'ensemble A s'appelle le domaine de définition de la fonction f , et se note souvent D_f .

On utilise aussi le terme 'application' à la place de 'fonction'. Une fonction se note souvent de la manière suivante :

$$f : A \rightarrow B,$$

ou

$$f : \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ a \mapsto f(a) \end{array}$$

ou encore

$$f : A \ni a \mapsto f(a) \in B.$$

Dans ce cours, la plupart du temps A sera une partie de $\mathbb{R}$, et B une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Si $B \subset \mathbb{R}$, la fonction f est appelée une fonction réelle d'une variable réelle.

Se donner une fonction c'est donc se donner deux ensembles A et B et un procédé (ou une formule) permettant de définir $f(a)$ pour un $a \in A$ arbitraire. Les ensembles A et B sont donc partie intégrante de la définition de la fonction f . Par exemple les trois fonctions

$$f_1 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

$$f_2 : [0, 1] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

$$f_3 : [0, 1] \ni x \mapsto x^2 \in [0, 1]$$

sont trois fonctions différentes.

6.1. Injections, surjections, bijections.

Définition 6.2. (1) on dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est injective si

$$\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$

(2) on dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est surjective si

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tel que } b = f(a).$$

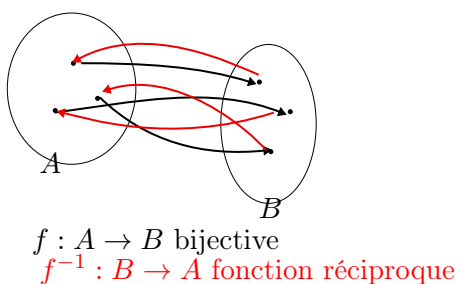
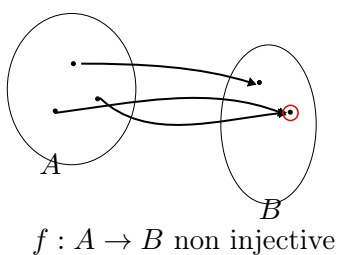
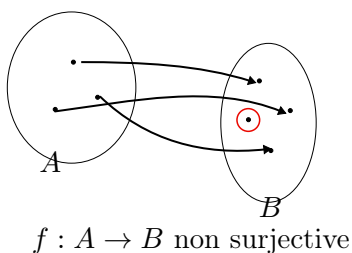
(3) on dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est bijective si elle est injective et surjective.

Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection. Pour tout $b \in B$ il existe donc un unique élément $a \in A$ tel que $b = f(a)$.

Définition 6.3. Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection. Pour tout $b \in B$ il existe donc un unique élément $a \in A$ tel que $b = f(a)$. On définit alors l'application réciproque ou inverse de f , notée $f^{-1} : B \rightarrow A$ par

$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$$

Il est important de noter que le fait d'être injective, surjective etc dépend des ensembles de départ et d'arrivée A et B . Par exemple dire que $\sin x$ est injective ou surjective n'a pas de sens.



6.2. Domaine de définition naturel. Il arrive souvent qu'une fonction soit simplement donnée par une formule, par exemple $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Dans ce cas on choisit d'habitude $B = \mathbb{R}$ et pour domaine de définition D_f le plus grand sous ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel la formule définissant f a un sens. Dans notre cas on a $D_f = \mathbb{R}$.

Si par exemple $f(x) = \frac{1}{x-1}$, on a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ et si $f(x) = \sqrt{x+1}$, $D_f =]-1, +\infty[$.

6.3. Restriction, image, image inverse.

Définition 6.4. Soit $f : A \rightarrow B$. et $A' \subset A$, $B' \subset B$.

- (1) la restriction de f à A' se note $f|_{A'}$.
- (2) l'ensemble $\{f(a) : a \in A'\}$ est une partie de B notée $f(A')$, appelée image de A' par f .
- (3) l'ensemble $\{a \in A : f(a) \in B'\}$ est une partie de A notée $f^{-1}(B')$, appelée image inverse de B' par f .

Rappelons qu'on doit distinguer l'élément $a \in A$ et le singleton $\{a\} \subset A$, et donc aussi distinguer $f(a)$ et $f(\{a\})$, le premier étant un élément de B , le deuxième un singleton de B .

6.4. Fonctions bornées.

Définition 6.5. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et soit $A \subset D$. On dit que f est majorée resp. minorée sur A si l'ensemble $f(A)$ est majoré, resp. minoré. De manière équivalente f est majorée, resp. minorée sur A si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \leq C \text{ resp. } f(x) \geq C \quad \forall x \in A.$$

La fonction f est bornée sur A si elle est majorée et minorée sur A , c'est à dire si il existe $C \geq 0$ tel que

$$|f(x)| \leq C \quad \forall x \in A.$$

6.5. Fonctions monotones.

Définition 6.6. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle. On dit que f est croissante resp. décroissante sur D si

$$\forall x, x' \in D, x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \text{ resp. } f(x) \geq f(x').$$

On dit que f est strictement croissante resp. strictement décroissante sur D si

$$\forall x, x' \in D, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \text{ resp. } f(x) > f(x').$$

On dit que f est (strictement) monotone sur D si f est (strictement) croissante ou décroissante sur D .

Remarque 6.7. Supposons que f est croissante sur D_1 et croissante sur D_2 . Alors f n'est pas forcément croissante sur $D = D_1 \cup D_2$.

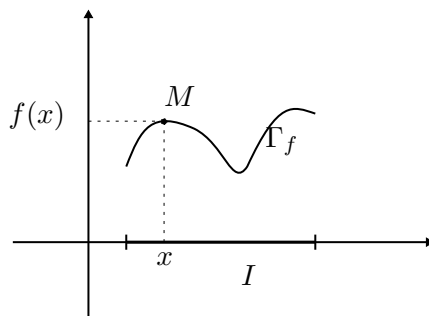
6.6. Graphes. Soient A, B deux ensembles. On rappelle que le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) pour $a \in A, b \in B$, l'exemple typique étant $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On rappelle que si $A = B$, il faut distinguer le couple (a, a') , qui est un élément de $A \times A$, de la paire $\{a, a'\}$, qui est un sous ensemble de A , formé des deux éléments a et a' . En particulier $(a, a') \neq (a', a)$ si $a \neq a'$, alors que $\{a, a'\} = \{a', a\}$.

Définition 6.8. Soit $f : A \rightarrow B$. Le graphe de f est le sous ensemble de $A \times B$ défini par :

$$G_f := \{(a, f(a)) : a \in A\}.$$

Il est clair que se donner une fonction $f : A \rightarrow B$ est complètement équivalent à se donner son graphe G_f .



Supposons que $A, B \subset \mathbb{R}$, c'est à dire que f est une fonction réelle d' une variable réelle. Son graphe G_f est donc un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}.$$

Très souvent A est un intervalle et G_f est une courbe dans $\mathbb{R}^2$, 'étalée' au dessus de A . Ceci signifie que si $a \in \mathbb{R}$ la droite verticale d' équation $x = a$ ne rencontre pas G_f si $a \notin A$, et rencontre G_f en un point et un seul, de coordonnées $(a, f(a))$ si $a \in A$.

Il résulte de cette remarque qu' une courbe dans $\mathbb{R}^2$ n' est pas toujours le graphe d' une fonction. Par exemple le cercle unité

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

n' est pas un graphe, car la droite d' équation $x = a$ coupe C en deux points $\pm\sqrt{1-a^2}$ si $|a| < 1$. Par contre le demi cercle

$$C^+ = C \cap \{y \geq 0\}$$

est le graphe de la fonction

$$[-1, 1] \ni x \mapsto \sqrt{1-x^2}.$$

6.7. Surgraphe, sousgraphe.

Définition 6.9. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \subset \mathbb{R}$ une fonction. Le surgraphe resp. sousgraphe de f est l' ensemble :

$$G^+(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, f(x) < y\}, \text{ resp. } G^-(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y < f(x)\}.$$

En d' autres termes le surgraphe de f est l' ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ situés (strictement) au dessus du graphe de f .

6.7.1. *Translations et symétries.* Pour $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ on note par $T_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la *translation* par $\vec{u}$ définie par

$$T_{\vec{u}} : x \mapsto x + \vec{u}.$$

De même on note par S_{Ox} , resp. S_{Oy} la symétrie par rapport à Ox , resp. Oy :

$$S_{Ox} : (x, y) \mapsto (x, -y), \quad S_{Oy} : (x, y) \mapsto (-x, y),$$

et par S_O la symétrie par rapport à l'origine

$$S_O : (x, y) \mapsto (-x, -y).$$

6.8. Action des translations sur les graphes. Soit maintenant $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \subset \mathbb{R}$ une fonction.

6.8.1. *Translations le long de l'axe Oy .* Soit pour $b \in \mathbb{R}$:

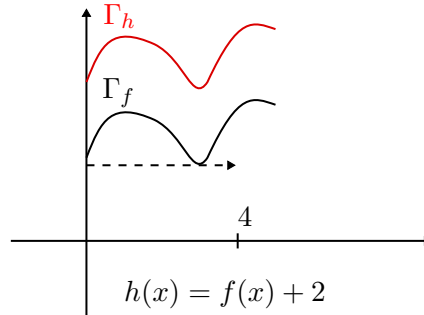
$$h(x) = f(x) + b,$$

de domaine $D_h = D_f$. On a

$$G_h = T_{(0,b)}(G(f)),$$

le graphe de h est l'image du graphe de f par la translation de vecteur $(0, b)$ (ou translation par b le long de l'axe Oy). En effet

$$\begin{aligned} G_h &= \{(x, h(x)) : x \in A\} = \{(x, f(x) + b) : x \in A\} = \{(x, y + b) : x \in A, y = f(x)\} \\ &= \{(x, y + b) : (x, y) \in G_f\} = T_{(0,b)}(G_f). \end{aligned}$$



6.8.2. *Translations le long de l'axe Ox .* Soit pour $a \in \mathbb{R}$

$$h(x) = f(x - a),$$

de domaine

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x - a \in D_f\} = \{x + a : x \in D_f\} = T_{(a,0)}(D_f).$$

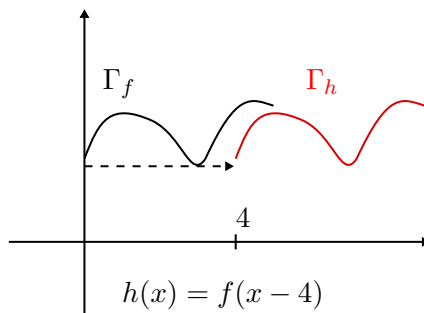
On a

$$G_h = T_{(a,0)}(G_f),$$

le graphe de h est l'image du graphe de f par la translation par a le long de l'axe Ox (et non la translation par $-a$). En effet

$$\begin{aligned} G_h &= \{(x, h(x)) : x \in D_h\} \\ &= \{(x, f(x - a)) : x - a \in D_f\} = \{(x' + a, f(x')) : x' \in D_f\} = T_{(a,0)}(G_f), \end{aligned}$$

en posant $x' = x - a$ dans la dernière ligne.



6.9. Action des symétries sur les graphes. L' action des symétries est plus simple. On vérifie que

$$\text{si } h(x) = f(-x), \text{ alors } G_h = S_{Oy}(G_f),$$

$$\text{si } h(x) = -f(x), \text{ alors } G_h = S_{Ox}(G_f),$$

$$\text{si } h(x) = -f(-x), \text{ alors } G_h = S_O(G_f).$$

7. LIMITES ET CONTINUITÉ

7.1. Voisinage d'un point.

Définition 7.1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- (1) Un voisinage de a est un ensemble qui contient un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ pour un $\delta > 0$;
- (2)
- (3) un voisinage pointé de a est un ensemble qui contient $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ pour un $\delta > 0$ mais qui ne contient pas le point a .
- (4) un voisinage pointé à droite de a est un ensemble qui contient $]a, a + \delta[$ pour un $\delta > 0$ mais qui ne contient pas le point a .
- (5) un voisinage pointé à gauche de a est un ensemble qui contient $]a - \delta, a[$ pour un $\delta > 0$ mais qui ne contient pas le point a .

Par exemple l' ensemble $[-1, 1] \cup \{2\}$ est un voisinage de 0. Dans la pratique on ne fait pas d' erreur de raisonnement si on pense à un voisinage, voisinage pointé, voisinage pointé à droite / gauche de a comme un ensemble $]a - \delta, a + \delta[$, $]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$, $]a, a + \delta[$ ou $]a - \delta, a[$ pour un $\delta > 0$, l' idée essentielle étant que δ peut être très petit, et qu' on ne s' intéresse pas à sa taille.

On utilise aussi souvent la notion de 'voisinage de l' infini'.

Définition 7.2. Un voisinage de $+\infty$, resp. $-\infty$ est un ensemble qui contient un intervalle $]M, +\infty[$, resp. $] - \infty, M[$.

Noter qu' un voisinage de $\pm\infty$ est automatiquement 'pointé', comme $\pm\infty$ ne sont pas des nombres réels. La aussi M peut être très grand (positif ou négatif).

La proposition suivante est évidente.

Proposition 7.3. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. L'intersection d'un nombre fini de voisinages (pointés, à droite, à gauche) de a est un voisinage (pointé, à droite, à gauche) de a .

On aura compris que la seule propriété importante d'un voisinage de a est de contenir un intervalle $]a - \epsilon, a + \epsilon[$, la taille de $\epsilon > 0$ étant sans importance. On utilisera souvent le langage suivant.

Définition 7.4. Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un réel x et $a \in \mathbb{R}$. On dit que $P(x)$ est vraie au voisinage de a si il existe un voisinage V de a tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in V$.

Par exemple f étant une fonction, la propriété $f(x) \geq 0$ est vraie au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in V$, ou de manière équivalente s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

7.2. Limites.

7.2.1. Limite à droite ou à gauche.

Définition 7.5. Soit $a \in \mathbb{R}$, f une fonction définie sur un voisinage pointé à droite resp. à gauche de a et $L \in \mathbb{R}$. On dit que L est la limite à droite resp. à gauche de f en a et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = L$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - L| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \text{ tel que } 0 < x - a < \delta \text{ resp. } -\delta < x - a < 0.$$

Noter que comme f est définie sur un voisinage pointé à droite de a , il existe $\delta_0 > 0$ tel que f est définie sur $]a, a + \delta_0[$. Pour un $\epsilon > 0$ fixé dans la Def. 7.2, le nombre δ dépend a priori de ϵ , et peut aussi être choisi inférieur à δ_0 , de façon que f soit bien définie pour $x \in]a, a + \delta[$.

7.2.2. Limite en un point.

Définition 7.6. Soit $a \in \mathbb{R}$, f une fonction définie sur un voisinage pointé de a et $L \in \mathbb{R}$. On dit que L est la limite de f en a et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - L| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \text{ tel que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Le théorème suivant est très important. On l'utilise d'habitude pour montrer qu'une fonction f n'a pas de limite en un point a , ou qu'un nombre L n'est pas la limite de f en a , en choisissant convenablement la suite (u_n) .

Théorème 7.7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$,

(2) pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$(7.1) \quad x_n \neq a \text{ pour } n \text{ assez grand et } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Remarque 7.8. Fixons $\delta > 0$ tel que $f(x)$ est définie si $0 < |x - a| < \delta$. Il suit de (7.1) que pour n assez grand on a $0 < |x_n - a| < \delta$ et donc $f(x_n)$ est bien défini pour n assez grand.

Remarque 7.9. (1) la propriété $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ est équivalente à

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

(2) la limite d'une fonction f en un point a n'existe pas toujours, même si f est définie au point a . Par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x^{-1}) & \text{pour } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

n'a pas de limite en 0. En effet on la suite $x_n = (n\pi)^{-1}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ mais $f(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ qui n'a pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$.

(3) Il n'est pas nécessaire que f soit définie en $x = a$ pour définir la limite de f en a .

(4) Supposons que f est définie en a et possède une limite L en a . Alors la valeur de L ne dépend pas de $f(a)$.

7.2.3. Limite en $\pm\infty$.

Définition 7.10. Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que L est la limite de f en $\pm\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que

$$|f(x) - L| \leq \epsilon, \text{ pour tout } x \in]M, +\infty[, \text{ resp. } x \in]-\infty, -M[.$$

L'analogue du Thm. 7.7 reste vrai, c'est à dire que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

7.2.4. limites infinies.

Définition 7.11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage pointé, resp. à droite, à gauche de a . On dit que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = +\infty,$$

si pour tout $C > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \geq C \text{ pour tout } x \text{ tel que } 0 < |x - a| < \delta \text{ resp. } 0 < x - a < \delta, \text{ resp. } -\delta < x - a < 0.$$

On dit que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = -\infty,$$

si pour tout $C > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$f(x) \leq -C$ pour tout x tel que $0 < |x-a| < \delta$ resp. $0 < x-a < \delta$, resp. $-\delta < x-a < 0$.

Définition 7.12. Soit f une fonction définie dans un voisinage de $+\infty$ resp. $-\infty$. On dit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

si pour tout $C > 0$ il existe M tel que

$$f(x) \geq C \text{ pour tout } x \in [M, +\infty[, \text{ resp. } x \in]-\infty, M].$$

On dit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

si pour tout $C > 0$ il existe M tel que

$$f(x) \leq -C \text{ pour tout } x \in [M, +\infty[, \text{ resp. } x \in]-\infty, M].$$

On utilise parfois le résultat suivant.

Proposition 7.13. Soit f une fonction définie sur un voisinage de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est finie, alors f est bornée au voisinage de a .

Démonstration. On prend $\epsilon = 1$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $|x - a| \leq \delta_0$ alors $|f(x) - L| \leq 1$ et donc $|f(x)| \leq L + 1$, par l'inégalité triangulaire. $\square$

7.3. Unicité de la limite.

Proposition 7.14. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et $L, L' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L'.$$

Alors $L = L'$.

Cette propriété permet de parler de la limite d'une fonction en un point. Bien qu'elle semble évidente elle demande quand même à être vérifiée.

Démonstration. On utilise l'inégalité triangulaire :

$$(7.2) \quad |L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |f(x) - L| + |f(x) - L'|.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $\delta, \delta' > 0$ tel que $|f(x) - L| \leq \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$ et $|f(x) - L'| \leq \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta'$. Soit $\delta_0 = \min(\delta, \delta')$. Si $0 < |x - a| \leq \delta_0$ on déduit de (7.2) que $|L - L'| \leq 2\epsilon$. Comme ϵ est arbitraire on obtient que $L = L'$. $\square$

7.4. Opérations sur les fonctions. Soient $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un même ensemble $A \subset \mathbb{R}$, λ deux constantes. On définit les fonctions :

$$f + g : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ par } (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\lambda f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ par } (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$fg : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ par } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Le produit fg de deux fonctions ne doit pas être confondu avec la composition $f \circ g$ qui n'est d'ailleurs pas toujours définie. Notons aussi qu'on peut identifier le réel λ avec la fonction constante :

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \lambda,$$

que l'on peut aussi noter λ , la multiplication d'une fonction par un réel est un cas particulier de la multiplication de deux fonctions.

Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$ on peut aussi définir les fonctions

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} : A &\rightarrow \mathbb{R} \text{ par } \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}, \\ \frac{f}{g} : A &\rightarrow \mathbb{R} \text{ par } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

Evidemment $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. Bien que le réel $\frac{1}{a}$ se note souvent a^{-1} , on évitera de noter $\frac{1}{g}$ par g^{-1} , cette dernière notation étant plutôt réservée à la fonction réciproque de g , quand celle-ci est définie.

Pour formuler les théorèmes classiques sur les limites de sommes, produits et quotients de fonctions, il est utile d'étendre, quand c'est possible, les notions de sommes, produits et quotients définies initialement pour des nombres réels. On obtient la table suivante :

(7.3)

$$a + \pm\infty = \pm\infty, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \pm\infty + \pm\infty = \pm\infty, \quad \pm\infty + \mp\infty \text{ non défini},$$

$$a \times \pm\infty = \text{sgn}(a) \pm\infty, \quad \text{si } a \neq 0, \quad 0 \times \pm\infty \text{ non défini},$$

$$\pm\infty \times \pm\infty = +\infty, \quad \pm\infty \times \mp\infty = -\infty$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{0} \text{ non définis.}$$

Proposition 7.15. Soit f_1, f_2 deux fonctions définies sur des voisinages de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec

$$\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ et $f_1 f_2$ sont définies sur un voisinage de a et on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1 f_2)(x) = L_1 L_2,$$

dans tous les cas où les sommes et produits dans les membres de droite sont définis.

De plus si $L_2 \neq 0$, alors $\frac{f_1}{f_2}$ est définie sur un voisinage de a et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{L_1}{L_2},$$

dans tous les cas où le quotient dans le membre de droite est défini.

Les versions de la Prop. 7.15 pour les limites à gauche et à droite, et en remplaçant voisinages par voisinages pointés sont aussi correctes.

Démonstration. On va montrer seulement les cas $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} (f_1 f_2)(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Pour la somme, le point clé est comme d'habitude l'inégalité triangulaire :

$$(7.4) \quad |f_1(x) + f_2(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2|.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i$, il existe $\delta_i > 0$ tel que $|f_i(x) - L_i| \leq \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta_i$, pour $i = 1, 2$. Prenons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$ on a donc en utilisant (7.4)

$$|f_1(x) + f_2(x) - (L_1 + L_2)| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

On utilise ensuite l'argument dit de ' $\epsilon/2$ '. On choisit δ_1, δ_2 en remplaçant ϵ par $\epsilon/2$ au début de l'argument, on obtient bien ϵ à la fin.

Pour le produit, on utilise

$$(7.5) \quad \begin{aligned} |f_1(x)f_2(x) - L_1L_2| &= |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\ &\leq |(f_1(x) - L_1)||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \end{aligned}$$

Par la Prop. 7.13, on sait que f_2 est bornée au voisinage de a , c'est à dire qu'il existe $\delta_0 > 0$ et $M \geq 0$ tel que

$$(7.6) \quad |f_2(x)| \leq M, \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_0$$

On choisit maintenant $\epsilon > 0$. Comme plus haut il existe $\delta_i > 0$ tel que $|f_i(x) - L_i| \leq \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta_i$, pour $i = 1, 2$. Prenons encore $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - a| < \delta$, on déduit de (7.5) que :

$$|f_1(x)f_2(x) - L_1L_2| \leq (M)\epsilon + |L_1|\epsilon.$$

On choisit δ_1, δ_2 en remplaçant ϵ par $(|L_1| + M)^{-1}\epsilon$ pour obtenir ϵ à la fin. $\square$

7.5. Limites et inégalités.

Proposition 7.16. *Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de a avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$.*

- (1) *supposons que $f(x) \leq M$ sur un voisinage pointé de a . Alors $L \leq M$.*
- (2) *supposons que $f(x) \geq M$ sur un voisinage pointé de a . Alors $L \geq M$.*

On résume souvent ce résultat en disant que les inégalités *larges* passent à la limite.

Démonstration. Montrons (1), (2) étant similaire. Soit $\delta_0 > 0$ tel que $f(x) \leq M$ pour $0 < |x - a| \leq \delta_0$. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leq \epsilon$ si $0 < |x - a| \leq \delta$. On obtient que si $0 < |x - a| < \min(\delta_0, \delta)$, alors

$$L = f(x) + L - f(x) \leq f(x) + |f(x) - L| \leq M + \epsilon.$$

On a donc $L \leq M + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, et donc $L \leq M$. $\square$

Remarque 7.17. *Les inégalités strictes ne passent pas à la limite. Prenons $f(x) = x^2$, on a $f(x) > 0$ sur tout voisinage pointé de 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.*

Proposition 7.18. *Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de a avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$.*

- (1) *supposons que $L > M$. Alors $f(x) > M$ sur un voisinage pointé de a .*
- (2) *supposons que $L < M$. Alors $f(x) < M$ sur un voisinage pointé de a .*

Démonstration. Montrons (1). Soit $\epsilon > 0$ tel que $L - \epsilon > M$. Il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < |x - a| \leq \delta$ alors $|f(x) - L| \leq \epsilon$ et donc $f(x) = f(x) - L + L \geq L - \epsilon > M$. $\square$

Remarque 7.19. Si suppose simplement que $L \geq M$ on ne peut pas en déduire que $f(x) \geq M$ sur un voisinage pointé de a . Par exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(x^{-1}) = 0,$$

mais $x \sin(x^{-1})$ change de signe sur tout voisinage pointé (à droite, à gauche) de 0.

7.6. Continuité.

Définition 7.20. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en a , resp. continue à droite, à gauche en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = f(a).$$

Définition 7.21. Soit f une fonction définie sur un intervalle. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Remarque 7.22. Si a est une des extrémités de I et I contient a la continuité de f en a signifie la continuité à gauche ou à droite en a .

On étend de manière évidente la définition au cas où f est définie sur une union finie d'intervalles.

7.6.1. Extension par continuité. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$, ayant une limite finie L au point a . En posant $f(a) = L$, la fonction f est continue au point a . Cette extension de f au point a s'appelle l'extension par continuité de f en a .

7.6.2. Opérations sur les fonctions continues. La Prop. 7.15 donne immédiatement le résultat important suivant.

Proposition 7.23. Soit f, g deux fonctions continues sur I . Alors $f + g, fg$ sont continues sur I . Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

7.6.3. Composition des fonctions continues.

Théorème 7.24. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de a avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Soit g une fonction définie sur un voisinage de L , continue au point L . Alors $g \circ f$ est définie sur un voisinage pointé de a et

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g(L).$$

Démonstration. Montrons que $g \circ f$ est définie sur un voisinage pointé de a , c'est à dire qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que $g \circ f(x)$ est définie si $0 < |x - a| < \delta_0$. Soit $\epsilon_0 > 0$ tel que $g(y)$ est définie si $|y - L| < \epsilon_0$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, il existe δ_0 tel que $|f(x) - L| < \epsilon_0$ si $0 < |x - a| < \delta_0$. En posant $y = f(x)$, $g \circ f(x) = g(y)$ est donc bien défini si $0 < |x - a| < \delta_0$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g(L)$. Fixons $\epsilon > 0$. Comme g est continue au point L , Il existe $\delta > 0$ tel que $|g(y) - g(L)| < \epsilon$ si $|y - L| < \delta$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, il existe $\delta' > 0$ tel que $|f(x) - L| < \delta$ si $0 < |x - a| < \delta'$. En posant $y = f(x)$ on a donc $|g \circ f(x) - g(L)| < \epsilon$ si $0 < |x - a| < \delta'$. $\square$

Corollaire 7.25. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle contenant $f(I)$. Alors $g \circ f$ est continue sur I .*

7.7. Comment fabriquer des fonctions continues. On fabrique des fonctions continues en utilisant, éventuellement plusieurs fois, les opérations de somme, produit, quotient, composition, à partir de fonctions simples dont on sait déjà qu'elles sont continues.

Le principe de base est le suivant : *Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition naturel.*

Rappelons que le domaine de définition naturel de x^α pour $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux est :

- (1) $\mathbb{R}$ si $p \geq 0$ et q impair,
- (2) $[0, +\infty[$ si $p \geq 0$ et q pair,
- (3) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $p < 0$ et q impair,
- (4) $]0, +\infty[$ si $p < 0$ et q pair.

Le domaine de définition naturel de x^s pour $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est $[0, +\infty[$ si $s \geq 0$ et $]0, +\infty[$ si $s < 0$.

Rappelons que le *principe de base pour bien calculer* avec les puissances est de réécrire

$$(7.7) \quad x^s = e^{s \ln x} \text{ si } x > 0.$$

- Proposition 7.26.** (1) *les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$,*
 (2) *les fonctions puissances sont continues sur leur domaine naturel de définition,*
 (3) *la fonction e^x est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$,*
 (4) *les fonctions $\cos x$, $\sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. le point (1) est facile. Il est évident de montrer que les fonctions $x \mapsto a$, $a \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par somme et produit répétés de ces deux fonctions, on obtient la continuité de toutes les fonctions polynômes. On peut déduire le point (2) du point (3), à l'aide de (7.7)

Les points 3) et 4) nécessitent une définition rigoureuse des fonctions e^x , $\ln x$, $\cos x$ et $\sin x$. Pour ce faire on montre qu'on peut définir pour $x \in \mathbb{R}$ le réel e^x comme

$$e^x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On montre ensuite que la fonction e^x est continue, strictement croissante avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Il suit de théorèmes vus dans la suite du cours que $e^x : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est une bijection, et la fonction $\ln x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est alors définie comme la fonction réciproque de e^x . Sa continuité résulte encore de résultats généraux.

Une autre façon de définir $\ln x$ est par la formule $\ln x := \int_1^x \frac{1}{y} dy$, qui nécessite une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction. Finalement

$\cos x$ et $\sin x$ sont définis de façon analogue à e^x par les formules :

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Leur continuité résulte encore de théorèmes généraux sur les séries de fonctions. $\square$

7.8. Limites classiques. On rappelle maintenant quelques limites classiques, que l'on peut retenir à l'aide du principe suivant : *l'exponentielle l'emporte sur la puissance, la puissance l'emporte sur le logarithme.*

Ce principe s'utilise de la manière suivante : soit une fonction qui s'exprime comme un *produit* d'exponentielles et de puissances, (ou de puissances et de logarithme, ou des trois à la fois), et dont la limite en 0 ou en $\pm\infty$ est une forme indéterminée. Alors on peut déterminer la limite en enlevant le logarithme devant la puissance et la puissance devant l'exponentielle. Il est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 7.27.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} x^b (\ln x)^c = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0, \\ 0 & \text{si } a < 0, \\ +\infty & \text{si } a = 0, b > 0, \\ 0 & \text{si } a = 0, b < 0, \\ +\infty & \text{si } a = b = 0, c > 0, \\ 0 & \text{si } a = b = 0, c < 0, \\ 1 & \text{si } a = b = c = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ax} |x|^b = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 0, \\ 0 & \text{si } a > 0, \\ +\infty & \text{si } a = 0, b > 0, \\ 0 & \text{si } a = 0, b < 0, \\ 1 & \text{si } a = b = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^b |\ln x|^c = \begin{cases} 0 & \text{si } b > 0, \\ +\infty & \text{si } b < 0, \\ +\infty & \text{si } b = 0, c > 0, \\ 0 & \text{si } b = 0, c < 0, \\ 1 & \text{si } b = c = 0. \end{cases}$$

8. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET DÉRIVÉES

8.1. Développements limités.

8.1.1. *Notations.* On utilisera dans la suite la notation $\epsilon(x)$ pour désigner une fonction arbitraire (définie dans un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$) telle que $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

Cette notation est très utile, mais conduit à des identités étranges comme

$$\epsilon(x) + \epsilon(x) = \epsilon(x) \text{ ou encore } \epsilon(x) - \epsilon(x) = \epsilon(x)$$

qui signifient simplement que la somme ou la différence de deux fonctions qui tendent vers 0 en a est une autre fonction qui tend vers 0 en a . Ces problèmes disparaissent si on prend la peine de décorer chaque fonction $\epsilon(x)$ d'un indice, on obtient alors des formules comme

$$\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) = \epsilon_3(x) \quad \epsilon_1(x) - \epsilon_2(x) = \epsilon_3(x),$$

qui sont sans ambiguïté.

Une autre notation que l'on trouve souvent dans la littérature est la notation de Landau, où on utilise $o(1)$ à la place de $\epsilon(x)$.

Remarque 8.1. Soit $\epsilon(x)$ une fonction définie au voisinage de 0 telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x)$ et $g(x)$ une fonction définie au voisinage de a avec $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. La fonction $\epsilon(g(x))$ est donc bien définie au voisinage de a , avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(g(x)) = 0$. On peut donc écrire $\epsilon(g(x)) = \epsilon(x)$. Par exemple, pour $a = 0$ on obtient l'identité $\epsilon(x^2) = \epsilon(x)$.

8.1.2. *Définition.*

Définition 8.2. Soit f une fonction définie sur un voisinage pointé de $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre k au point a s'il existe des réels $b_0, \dots, b_k$ et une fonction $\epsilon(x)$ définie un voisinage pointé de a telle que

$$(8.1) \quad f(x) = b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_k(x - a)^k + (x - a)^k \epsilon(x),$$

un voisinage pointé de a , avec

$$(8.2) \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

Le polynôme

$$P_k(x) = \sum_{l=0}^k b_l(x - a)^l,$$

s'appelle la partie principale la fonction $(x - a)^k \epsilon(x)$ s'appelle le reste du DL de f en a .

8.1.3. *Remarques.* Toutes les remarques qui suivent sont importantes et doivent donc être méditées.

Remarque 8.3. Le DL en 0 suivant est correct, mais idiot :

$$(8.3) \quad e^x = 1 + x + 3x^2 + x\epsilon(x).$$

En effet $3x^2$ est de la forme $x\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$, et donc (8.3) est équivalent à :

$$e^x = 1 + x + x\epsilon(x).$$

On peut invoquer le principe d'économie : seuls les facteurs de $(x - a)^l$ pour $l \leq k$ figurent dans la partie principale d'un DL à l'ordre k .

Remarque 8.4. Comme d'habitude avec le calcul des limites en a , la valeur de $f(a)$ n'a aucune importance. Néanmoins si f possède un DL au point a , on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_0$, où b_0 est le premier terme de (8.1), et on supposera toujours que f est définie et continue au point a , c'est à dire que $f(a) = b_0$. L'identité (8.1) est donc valable sur un voisinage de a .

Remarque 8.5. L'écriture

$$P_k(x) = \sum_{l=0}^k b_l(x-a)^l,$$

semble inhabituelle pour un polynôme, si $a \neq 0$. Néanmoins c'est la bonne façon d'écrire un polynôme si l'on s'intéresse à son comportement au voisinage de a . En effet la famille de fonctions $1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^k$ est une 'échelle' de fonctions, tendant de plus en plus vite vers 0 quand x tend vers a .

Remarque 8.6. L'existence d'un DL d'ordre 0 en a signifie simplement que f possède une limite finie en a .

Remarque 8.7. Le seul point important dans la Définition 8.2 est la propriété (8.2). En effet on peut toujours obtenir (8.1) en définissant la fonction $\epsilon(x)$ par

$$\epsilon(x) := \frac{f(x) - b_0 - b_1(x-a) - \dots - b_k(x-a)^k}{(x-a)^k},$$

l'existence du DL signifie donc que cette fonction tend vers 0 en a .

Remarque 8.8. L'existence d'un DL en a se formulant à l'aide de la limite dans (8.2), un DL ne peut servir qu'à calculer une limite au point a . Il est impossible d'en déduire par exemple un encadrement de la valeur de $f(x)$ pour x proche de a .

8.2. Unicité du DL.

Lemme 8.9. Soit f une fonction possédant un DL à l'ordre k au point a :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_k(x-a)^k + (x-a)^k \epsilon(x).$$

Alors f possède un DL à tout ordre $k' < k$ au point a :

$$b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_{k'}(x-a)^{k'} + (x-a)^{k'} \epsilon'(x).$$

Démonstration. C'est évident car

$$\epsilon'(x) = (x-a)^{k-k'} \epsilon(x) + \sum_{l=1}^{k-k'} (x-a)^l$$

tend vers 0 au point a . $\square$

Lemme 8.10 (Unicité du DL). Si f admet un DL d'ordre k au point a ce DL est unique.

Démonstration. Supposons que

$$f(x) = \sum_{l=0}^k b_l(x-a)^l + \epsilon(x) = \sum_{l=0}^k b'_l(x-a)^l + \epsilon'(x).$$

On obtient

$$(8.4) \quad 0 = \sum_{l=0}^k (b_l - b'_l)(x-a)^k + (x-a)^k(\epsilon(x) - \epsilon'(x)).$$

Montrons par récurrence sur $0 \leq n \leq k$ que $b_l = b'_l$ pour tout $0 \leq l \leq n$. Pour $n = 0$ on a $b_0 = b'_0$ en calculant la limite en a dans (8.4). Supposons que $b_l = b'_l$ pour tout $l \leq n-1$. On déduit de (8.4) que

$$0 = \sum_{l=n}^k (b_l - b'_l)(x-a)^l + (x-a)^k(\epsilon(x) - \epsilon'(x)),$$

et en divisant les deux membres par $(x-a)^n$ on obtient

$$0 = \sum_{l=n}^k (b_l - b'_l)(x-a)^{l-n} + (x-a)^{k-n}(\epsilon(x) - \epsilon'(x)),$$

et donc $b_n = b'_n$ en calculant encore la limite en a . On a donc montré que $b_l = b'_l$ pour tout $0 \leq l \leq k$. On obtient donc aussi que $0 = (x-a)^k(\epsilon(x) - \epsilon'(x))$ et donc $\epsilon(x) = \epsilon'(x)$ en divisant par $(x-a)^k$. $\square$

8.3. Applications des DL. Le DL d'une fonction étant formulé à l'aide d'une fonction $\epsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers a , un DL ne peut servir a priori qu'à calculer une limite au point a , voir la Remarque 8.8.

8.3.1. *Formes indéterminées et DL.* Considérons simplement le cas emblématique d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en $x = 0$, c'est à dire le calcul de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

La démarche à suivre pour lever l'indétermination consiste à faire un DL de f et g en 0, en allant à l'ordre pour chaque fonction jusqu'au premier terme *non nul* dans le DL. Ainsi on obtient

$$f(x) = a_k x^k + x^k \epsilon_1(x), \quad g(x) = b_l x^l + x^l \epsilon_2(x), \quad \text{avec } a_k, b_l \neq 0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_k x^k}{b_l x^l} \times \frac{1 + \epsilon_1(x)}{1 + \epsilon_2(x)},$$

et donc $\frac{f}{g}$ a la même limite en 0 que $\frac{a_k x^k}{b_l x^l}$ qui est facile à calculer.

8.3.2. *Position du graphe par rapport à la tangente.* Soit f une fonction dérivable, définie au voisinage de a . On souhaite connaître la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point a , dans un voisinage du point $M = (a, f(a))$. Pour cela on calcule le DL de f au point a , en allant jusqu'au premier ordre non nul *supérieur* à 2. On obtient donc :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_k(x-a)^k + (x-a)^k \epsilon(x), \quad k \geq 2, \quad a_k \neq 0.$$

La fonction f étant dérivable au point a on a $a_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$ et la position du graphe par rapport à la tangente est donnée par le signe, pour x proche de a , de

$$f(x) - (f(a) + (x-a)f'(a)) = (x-a)^k(a_k + \epsilon(x)),$$

qui est le même que celui de $a_k(x-a)^k$. On obtient alors les trois possibilités usuelles : le graphe est au dessus ou au dessous de sa tangente si k est pair, (suivant le signe de a_k), et traverse sa tangente si k est impair.

8.4. Quelques DL classiques. Voici une liste de DL classiques en 0 à connaitre. Le plus simple est le suivant :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x),$$

d' où l' on déduit, en remplaçant x par $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x).$$

On a ensuite :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} x^n \epsilon(x),$$

d' où l' on déduit, au moins formellement, en remplaçant x par ix :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + x^{2n+1} \epsilon(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + x^{2n} \epsilon(x).$$

Il est conseillé de méditer les deux formules suivantes :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6!} + x^3 \epsilon(x) = x + x^2 \epsilon(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \epsilon(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3 \epsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + x^n \epsilon(x)$$

8.5. Opérations sur les DL.

8.5.1. Somme et produit.

Proposition 8.11. Soit f, g deux fonctions admettant des DL à l' ordre k au point a , de partie principales P_k, Q_k . Alors $f+g$ et fg admettent des DL à l'ordre k au point a de parties principales

$$P_k + Q_k, \text{ resp. } P_k Q_k \text{ modulo } (x-a)^{k+1},$$

où $P_k Q_k$ modulo $(x-a)^{k+1}$ signifie que l' on conserve uniquement les facteurs de $(x-a)^l$ pour $l \leq k$ dans le produit $P_k Q_k$.

Démonstration. La démonstration est évidente. $\square$

8.5.2. *Quotient.* La formule bien connue

$$\sum_{l=0}^k y^l = \frac{1 - y^{k+1}}{1 - y},$$

peut se réécrire comme

$$\frac{1}{1 - y} = \sum_{l=0}^k y^l + y^k \frac{y}{1 - y} = \sum_{l=0}^k y^l + y^k \epsilon(y),$$

c' est à dire que le DL à l'ordre k en 0 de $(1 - y)^{-1}$ est :

$$(1 - y)^{-1} = \sum_{l=0}^k y^l + y^k \epsilon(y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \epsilon(y) = 0, \forall k \geq 1.$$

En remplaçant y par $-y$ on obtient :

$$(8.5) \quad (1 + y)^{-1} = \sum_{l=0}^k (-y)^l + y^k \epsilon(y), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \epsilon(y) = 0, \forall k \geq 1.$$

Proposition 8.12. *Soit f une fonction définie au voisinage de a avec un DL à l'ordre k en a :*

$$(8.6) \quad f(x) = \sum_{l=0}^k b_l (x - a)^l + (x - a)^k \epsilon(x).$$

On suppose que $b_0 (= f(a))$ est différent de 0, la fonction $\frac{1}{f}$ est donc définie au voisinage de a . On a

$$f(x) = b_0(1 + R_k(x)) + (x - a)^k \epsilon(x), \quad R_k(x) = \sum_{l=1}^k b_0^{-1} b_l (x - a)^l.$$

Alors la fonction $\frac{1}{f}$ possède un DL à l'ordre k en a :

$$\frac{1}{f(x)} = b_0^{-1} P_k(x) + (x - a)^k \epsilon(x),$$

où la partie principale $P_k(x)$ est obtenue en remplaçant y par $R_k(x)$ dans (8.5) et en ne gardant que les facteurs de $(x - a)^l$ pour $ll \leq k$.

Démonstration. En mettant $b_0 \neq 0$ en facteur on se ramène au cas $b_0 = 1$. On a donc

$$f(x) = 1 + r(x), \quad r(x) = R_k(x) + (x - a)^k \epsilon(x),$$

et

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{l=0}^k (-1)^l r(x)^l + r(x)^k \epsilon(r(x)).$$

Comme $r(x) = (x - a)\epsilon_1(x)$, on a en utilisant la remarque :

$$r(x)^k \epsilon(r(x)) = (x - a)^k \epsilon_1(x) \epsilon_2(x) = (x - a)^k \epsilon(x).$$

Le même type d' argument montre que $r(x)^l = R_k(x)^l + (x - a)^k \epsilon(x)$, et donc

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{l=0}^k (-1)^l R_k(x)^l + r(x)^k \epsilon(r(x)).$$

En ne gardant que les facteurs de $(x - a)^l$ pour $l \leq k$ dans le membre de droite, on obtient le résultat. $\square$

8.6. Composition des DL. Soit f et g deux fonctions ayant un DL en 0. Pour simplifier la discussion, on va supposer que f et g sont définies sur un voisinage (non pointé) de 0, et telles que $g(0) = 0$. On a donc, en notant par u la variable dont dépend f et x celle dont dépend g :

$$(8.7) \quad f(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k + u^k \epsilon(u),$$

$$(8.8) \quad g(x) = \sum_{k=1}^p b_k x^k + x^k \epsilon(x).$$

Cette identité étant une identité entre fonctions, valables au voisinage de $u = 0$, on peut remplacer u par $g(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ on a $\epsilon(g(x)) = \epsilon_1(x)$ et on peut calculer un DL de $f \circ g$ en 0 en remplaçant dans (8.7) la variable u par la partie principale du DL de g . Il faut évidemment prendre des précautions pour faire correctement le calcul, et plutôt que d' énoncer une règle générale, correcte mais incompréhensible, on va donner deux exemples.

Calculons tout d' abord le DL de $\ln(1 + \sin x)$ à l' ordre 3 en $x = 0$. On a

$$(8.9) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \epsilon(x),$$

$$(8.10) \quad \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \epsilon(u).$$

Comme le DL de $\sin x$ en 0 ne contient pas de terme constant, on peut bien remplacer u par $\sin x$ dans le DL de $\ln(1 + u)$. Comme le premier terme non nul dans le DL de $\sin x$ est le terme d' ordre 1 (x), on doit aller jusqu' à l' ordre 3 en u dans le DL de $\ln(1 + u)$. On remplace ensuite u par $x - \frac{x^3}{6}$ dans (8.10), et il est inutile de calculer les termes d' ordre supérieur à 3 en x . On obtient

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{x^3}{6}, \\ u^2 &= x^2 + x^3 \epsilon(x), \\ u^3 &= x^3 + x^3 \epsilon(x) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3 \epsilon(x).$$

Voici un autre exemple où le calcul est plus rapide. Calculons le DL de $e^{1-\cos x}$ à l' ordre 3 en 0. On a :

$$(8.11) \quad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + x^3 \epsilon(x).$$

On voit que le DL de $1 - \cos x$ commence par des termes en x^2 . Comme on va remplacer u par $1 - \cos x$ dans le DL de e^u , on a $u^k \epsilon(u) = x^{2k} \epsilon(x)$. Il

suffit donc d'aller jusqu'à l'ordre 2 (et même 1 en fait) dans le DL de e^u en $u = 0$:

$$(8.12) \quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u),$$

et on obtient

$$e^{1-\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x).$$

8.7. Dérivée d'une fonction.

Définition 8.13. Soit f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f est dérivable au point a s'il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que

$$(8.13) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = D.$$

Le réel D s'appelle dérivée de f au point a et se note le plus souvent $f'(a)$.

La notion de fonction dérivable à gauche, à droite au point a se définit de la même façon, la fonction f devant être définie a priori sur un voisinage à gauche ou à droite de a . La dérivée à gauche, à droite de f au point a se note souvent $f'_{g/d}(a)$.

Définition 8.14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I . La fonction $I \ni x \mapsto f'(x)$ s'appelle la dérivée de f . Si a est une extrémité de I et si $a \in I$, on convient que f est dérivable à gauche ou à droite au point a .

8.7.1. Lien avec les DL. Posons

$$\epsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

L'identité (8.13) se réécrit comme $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$, c'est à dire :

$$(8.14) \quad f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\epsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0,$$

et donc f admet un DL à l'ordre 1 en a . On déduit aussi de (8.14) que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. On a donc montré le résultat suivant.

Lemme 8.15. Soit f une fonction définie au voisinage de a . Si f est dérivable au point a , alors f est continue au point a .

Proposition 8.16. Soit f une fonction définie au voisinage de a .

(1) si f est dérivable en a , alors f admet le DL d'ordre 1 en a :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\epsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

(2) réciproquement si f admet le DL d'ordre 1 en a

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + (x - a)\epsilon(x)$$

et si f est continue au point a , alors $b_0 = f(a)$ et $b_1 = f'(a)$.

Démonstration. on a déjà montré le point (1). Pour montrer le point (2), comme f est continue en a on a $b_0 = f(a)$ et donc

$$\epsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - b_1 \text{ tend vers 0 au point } a,$$

ce qui veut dire que f est dérivable en a avec $f'(a) = b_1$. $\square$

8.7.2. *Interprétation géométrique.* Le quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, défini pour $x \neq a$ est la pente de la droite joignant les points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ du graphe G_f de f (cette droite est souvent appelée la *corde*). Quand x tend vers a , la corde tend vers la tangente, et en particulier sa pente tend vers D , la pente de la *tangente* T_a à G_f au point $(a, f(a))$. L'équation de la tangente T_a est donc

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

8.8. Opérations sur les dérivées.

Proposition 8.17. *Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors $f + g$, fg sont dérivables sur I et*

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Si $g(x) \neq 0$ sur I , la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Démonstration. La première affirmation suit des Props. 8.11 et 8.16. Pour la deuxième, il suffit de considérer le cas où $f(x) \equiv 1$. Le résultat suit alors des Props. 8.12 et 8.16. On peut aussi en donner une preuve directe : on a

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)},$$

donc

$$\frac{1}{x - a} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \right) = \frac{f(a) - f(x)}{x - a} \frac{1}{f(x)f(a)}.$$

Comme f est dérivable en a , le premier quotient tend vers $-f'(a)$ quand x tend vers a , et comme f est continue en a , le deuxième tend vers $\frac{1}{f^2(a)}$. $\square$

Proposition 8.18. *Soit f une fonction dérivable en a , et g dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(8.15) \quad (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Démonstration. On déduit de la Prop. 8.16 que :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\epsilon_1(x), \\ g(y) &= g(f(a)) + (y - f(a))g'(f(a)) + (y - f(a))\epsilon_2(y), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow f(a)} \epsilon_2(y) = 0$. On remplace y par $f(x)$ dans la deuxième ligne et on obtient :

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) \\ &+ (x - a)\epsilon_1(x)g'(f(a)) + ((x - a)f'(a) + (x - a)\epsilon_1(x))\epsilon_2(f(x)) \\ &=: g(f(a)) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + (x - a)\epsilon_3(x), \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon_3(x) = 0$. On applique ensuite la Prop. 8.16. $\square$

Remarque 8.19. Il est facile de retenir (8.15) en utilisant la notation de Leibniz $\frac{df}{dx}$ pour la dérivée de f par rapport à la variable x . En raisonnant avec l'expression formelle $\frac{df}{dx}$ comme si c'était une fraction, on obtient

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \times \frac{df}{dx},$$

ce qui correspond exactement à (8.15).

9. COURBES PARAMÉTRÉES

9.1. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $I \subset \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle, notée t , à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dans la pratique $n = 2$, parfois $n = 3$. On a donc

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)),$$

et se donner une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est équivalent à se donner les n fonctions coordonnées $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$.

9.1.1. Limites. On rappelle qu'on a défini la norme $\|x\|$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ au paragraphe (4.2.2).

Définition 9.1. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un voisinage pointé de $t_0 \in \mathbb{R}$. On dit que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L \in \mathbb{R}^n$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f(t) - L\| \leq \epsilon \text{ pour tout } t \text{ tel que } 0 < |t - t_0| \leq \delta.$$

La Définition 7.5 de la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est donc un cas particulier. Le fait suivant est évident.

Lemme 9.2. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un voisinage pointé de $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - L\| = 0.$$

Proposition 9.3. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un voisinage pointé de $t_0 \in \mathbb{R}$, avec $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Alors

$$(9.1) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$$

si et seulement si

$$(9.2) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Démonstration. Soit $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et posons $N(y) = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$. Comme $|y_i| \leq N(y)$ pour tout i , on a $|y_i|^2 \leq N^2(y)$ pour tout i et donc en faisant la somme sur i :

$$\|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq nN^2(y).$$

En prenant la racine carrée des deux membres on obtient donc

$$\|y\| = (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}N(y).$$

D' autre part comme $|a| \leq (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ on a aussi

$$N(y) \leq \|y\|,$$

et donc

$$(9.3) \quad N(y) \leq \|y\| \leq \sqrt{n}N(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

D' autre part, en revenant à la définition, il est facile de vérifier que (9.2) est équivalent à

$$(9.4) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} N(f(t)) - L = 0.$$

En utilisant alors (9.3) et le Lemme 9.2, on obtient la proposition. $\square$

9.1.2. Continuité.

Définition 9.4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction d' une variable réelle et $t_0 \in I$ tel que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$, c'est à dire que f est définie sur un voisinage de t_0 . On dit que f est continue au point t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

Si f est continue en chaque point de I , on dit que f est continue sur I .

On déduit de la Proposition 9.3 le résultat suivant.

Proposition 9.5. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue sur I si et seulement si chaque fonction coordonnée $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I .

9.1.3. Dérivées.

Définition 9.6. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie au voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable au point t_0 si il existe $D = (D_1, \dots, D_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$(9.5) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) = D.$$

Le vecteur $D \in \mathbb{R}^n$ se note $f'(t_0)$ et s' appelle dérivée de f au point t_0 .

Remarque 9.7. L' égalité (9.5) est une égalité entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, dans le membre de gauche de (9.5), $f(t) - f(t_0)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et $\frac{1}{t-t_0}$ est un réel, il s' agit donc de la multiplication d' un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par un scalaire.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la Proposition 9.3. Elle signifie que pour calculer la dérivée d' une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ il suffit de calculer la dérivée de chaque fonction coordonnée.

Proposition 9.8. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie au voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$. f est dérivable au point t_0 si et seulement si les fonctions coordonnées f_i sont dérivables au point t_0 et on a alors :

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0)).$$

9.2. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$, une fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{C}$ peut se considérer comme une fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^2$, en écrivant

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + if_2(t), \\ f_1(t) &= \operatorname{Re} f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f}(t)), \\ f_2(t) &= \operatorname{Im} f(t) = \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f}(t)). \end{aligned}$$

Si f est dérivable, par exemple sur un intervalle I , sa dérivée $f'(t) = f'_1(t) + if'_2(t)$ est considérée encore comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

9.2.1. Produits et quotients. $\mathbb{C}$ étant muni d'une multiplication, on peut introduire la fonction $fg : I \rightarrow \mathbb{C}$ si $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ sont dérivables sur I . En écrivant $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ et en utilisant (5.1) pour calculer fg , on vérifie facilement que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

De même si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction dérivable sur I avec $f(t) \neq 0$ pour $t \in I$, on vérifie de la même façon que :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

9.2.2. Dérivée des fonctions exponentielles.

Lemme 9.9. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{z_0 t}$ est dérivable et

$$(e^{z_0 t})' = z_0 e^{z_0 t}.$$

Démonstration. On pose $z_0 = a + ib$ et donc $e^{z_0 t} = e^{at} \cos bt + ie^{at} \sin bt$. Un simple calcul donne alors le lemme. $\square$

9.3. Courbes paramétrées. Supposons maintenant que $n = 2$ et considérons une fonction

$$M : I \ni t \mapsto M(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

où I est un intervalle ou une union d'intervalles, et $M(t) = (x(t), y(t))$ représente la position dans le plan d'un mobile M à l'instant t . Le cas n quelconque, en particulier $n = 3$ est similaire.

Définition 9.10. L ' ensemble

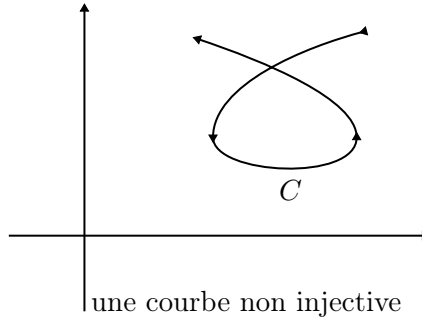
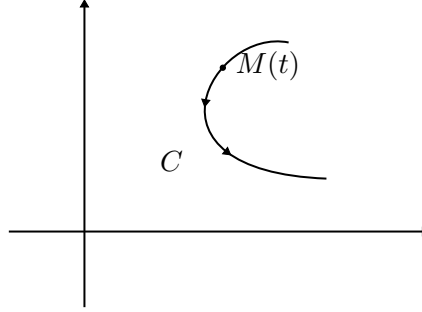
$$C = \{M(t) : t \in I\} = M(I) \subset \mathbb{R}^2$$

est appelé la trajectoire du mobile M . Si la fonction $M(t)$ est dérivable sur I le vecteur $M'(t) = (x'(t), y'(t))$ est appelé vecteur vitesse au temps t . La fonction $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est appelée un paramétrage de la courbe C .

La trajectoire C est donc un sous ensemble du plan $\mathbb{R}^2$, alors que le mobile M est une fonction. La trajectoire contient donc moins d'informations, par exemple si $M_0 \in C$, on ne sait pas à quel instant le mobile est passé par le point M_0 , dans quel sens et à quelle vitesse.

Définition 9.11. Une partie C de $\mathbb{R}^2$ munie d'une fonction $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

- i) $C = \{M(t) : t \in I\}$,
 - ii) $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective i.e. $M(t_1) = M(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2, \forall t_1, t_2 \in I$,
- est appelée une courbe paramétrée.



9.3.1. Tangentes.

Définition 9.12. Soit $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction dérivable et $t_0 \in I$. Le point $M(t_0) \in C$ est appelé un point régulier si $M'(t_0) \neq \vec{0}$, et un point singulier si $M'(t_0) = \vec{0}$. Si $M(t_0)$ est un point régulier, la droite passant par $M(t_0)$, de vecteur directeur $M'(t_0)$ est appelé tangente à C au point $M(t_0)$.

La représentation paramétrique de la tangente à C au point $M(t_0)$ est

$$D(t_0) = \{x = M(t_0) + \lambda M'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La représentation cartésienne est donnée par l'équation :

$$x'(t_0)(y - y(t_0)) = y'(t_0)(x - x(t_0))$$

La tangente est verticale, resp. horizontale, si $x'(t_0) = 0$, resp. $y'(t_0) = 0$.

Un cas particulier de courbe paramétrée est le graphe G_f d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, obtenu en prenant

$$M(t) = (t, f(t)).$$

Remarque 9.13. Il est possible que la trajectoire C se recoupe au point $M(t_0)$, c'est à dire qu'il existe $t_1 \neq t_0$ tel que $M(t_1) = M(t_0)$. En d'autres termes l'application M n'est pas injective, le mobile repasse au même point en deux temps différents.

Au voisinage du point d'intersection $M(t_0)$, C est formée de deux arcs, chaque un avec une tangente. L'arc parcouru par $M(t)$ pour t proche de t_0 , resp. t_1 a une tangente de vecteur directeur $M'(t_0)$, resp. $M'(t_1)$.

L'étude de l'allure d'une courbe paramétrée au voisinage d'un point singulier est délicate et se fait au cas par cas.

9.4. Asymptotes. Supposons que $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit continue sur I et que I est un intervalle ouvert ou semi ouvert. Soit donc $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ une des extrémités de I , qui n'appartient pas à I . On va supposer par exemple que I contient un intervalle $[t_0 - \delta, t_0[$ et on s'intéresse au comportement de $M(t)$ quand $t \rightarrow t_0^-$.

Si $\lim_{t \rightarrow t_0^-} M(t) =: M(t_0^-) \in \mathbb{R}^2$, la trajectoire C 'finit' au point $M(t_0^-)$, mais ne contient pas $M(t_0^-)$, de la même façon que l'intervalle $[t_0 - \delta, t_0[$ 'finit' au point t_0 mais ne contient pas t_0 .

Supposons maintenant que

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \|M(t)\| = +\infty.$$

Dans ce cas on dit que la courbe C possède une *branche infinie*.

Ceci est le cas si

$$(9.6) \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) = \pm\infty, \text{ ou } \lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) = \pm\infty,$$

mais ce n'est pas équivalent, comme le montre l'exemple $M(t) = t(\cos t, \sin t)$ $I = [0, +\infty[$, on a bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|M(t)\| = +\infty$, mais ni $x(t)$ ni $y(t)$ n'ont de limite en $+\infty$.

Une *asymptote* à une courbe C possédant une branche infinie, est une droite dont la branche infinie C se rapproche quand on la parcourt en s'éloignant vers l'infini. La définition précise est la suivante.

Définition 9.14. Soit C une courbe paramétrée par $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Supposons pour fixer les idées que I contienne un intervalle $[t_0 - \delta, t_0[$ avec $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que C possède une branche infinie, c'est à dire que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \|M(t)\| = +\infty$.

Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ est une asymptote à C si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} d(M(t), D) = 0,$$

où on rappelle que $d(M, D)$ désigne la distance du point M à la droite D , définie dans la Proposition 4.8.

9.4.1. Etude des branches infinies. On se place dans la situation de la Définition 9.14 et on suppose donc que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \|M(t)\| = +\infty$. Donnons rapidement la démarche pour étudier les branches infinies de C .

La classification donnée plus bas des branches infinies n'est pas exhaustive, l'exemple donné un peu plus haut ne rentrant dans aucune des situations que l'on va décrire.

Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) = y_0 \in \mathbb{R},$$

on dit que C possède une *asymptote horizontale* d'équation $y = y_0$.

Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) = x_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) = \pm\infty,$$

on dit que C possède une *asymptote verticale* d'équation $x = x_0$.

Supposons maintenant que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) = \pm\infty$. On considère alors la quantité $\frac{y(t)}{x(t)}$.

Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty,$$

on dit que C possède une *branche parabolique* d'axe Oy .

Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = 0,$$

on dit que C possède une *branche parabolique* d'axe Ox .

Supposons maintenant que

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*.$$

On considère alors la quantité $y(t) - ax(t)$. Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) - ax(t) = \pm\infty,$$

on dit que C possède la *direction asymptotique* d'équation $y = ax$.

Finalement si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R},$$

on dit que C possède l'asymptote d'équation $y = ax + b$.

9.5. Symétries. Les symétries éventuelles sont des propriétés importantes d'une courbe paramétrée. Elles permettent en particulier de réduire l'intervalle I dans lequel varie le paramètre t .

9.5.1. Parité. Supposons que I est symétrique par rapport à 0, c'est à dire que $t \in I \Rightarrow -t \in I$. Soit $I^+ = I \cap \mathbb{R}^+$ et

$$C^+ = \{M(t) : t \in I^+\}.$$

On vérifie alors facilement les faits suivants. Si

$$x(t) = x(-t) \text{ et } y(t) = y(-t),$$

alors $C = C^+$, et $M(t)$ parcourt C^+ deux fois quand t parcourt I .

Si

$$x(t) = x(-t) \text{ et } y(t) = -y(-t),$$

alors C est symétrique par rapport à l'axe Ox et $C = C^+ \cup S(C^+)$ où S est la symétrie par rapport à Ox .

Si

$$x(t) = -x(-t) \text{ et } y(t) = y(-t),$$

alors C est symétrique par rapport à l'axe Oy et $C = C^+ \cup S(C^+)$ où S est la symétrie par rapport à Oy .

Si

$$x(t) = -x(-t) \text{ et } y(t) = -y(-t),$$

alors C est symétrique par rapport à O et $C = C^+ \cup S(C^+)$ où S est la symétrie par rapport à O .

Remarque 9.15. On peut remplacer le paramètre 0 par un autre temps t_0 . Par exemple l'intervalle $I =]0, 1[$ est préservé par la transformation $t \mapsto 1 - t$, qui est la symétrie par rapport au milieu $t_0 = \frac{1}{2}$ de $]0, 1[$. La discussion précédente s'étend en remplaçant $t \mapsto -t$ par $t \mapsto 1 - t$. Il est donc possible de réduire plusieurs fois l'intervalle d'étude.

9.5.2. *Périodicité.* Si $M(t) = M(t + T)$ la fonction M est périodique de période T et il suffit d'étudier $t \mapsto M(t)$ pour $t \in [0, T[$, ou n'importe quel autre intervalle semi-ouvert de longueur T .

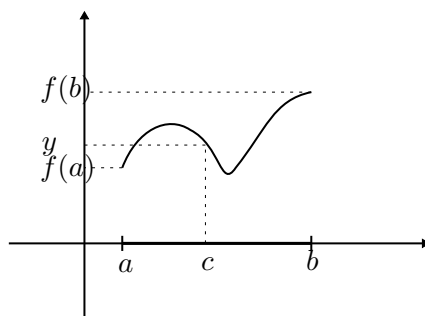
10. PROPRIÉTÉS GLOBALES DES FONCTIONS CONTINUES

La continuité d'une fonction f sur un intervalle I est une propriété *locale*, dans le sens qu'il suffit de la vérifier en chaque point de I , et qu'elle ne dépend que du comportement de f dans un voisinage de ce point. Dans cette section on montre des conséquences *globales* de la continuité d'une fonction sur un intervalle *fermé et borné*.

On rappelle, voir la Remarque 7.22, que f continue sur $[a, b]$ signifie que f est continue en tout point $x \in]a, b[$, continue à droite en a , continue à gauche en b .

10.1. Théorème des valeurs intermédiaires.

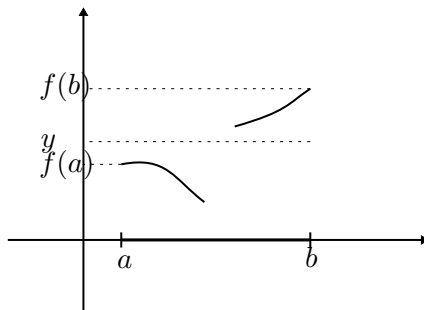
Théorème 10.1. [*Théorème des valeurs intermédiaires ; premier énoncé*]
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et y un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



Remarque 10.2. Si f n'est pas continue sur $[a, b]$, la conclusion du théorème 10.1 est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

La valeur $\frac{1}{2}$ comprise entre $0 = f(0)$ et $1 = f(1)$ n'est pas atteinte.



Démonstration. On va construire un point c comme dans le théorème à l'aide de la propriété de la borne supérieure. On commence par évacuer quelques cas évidents.

Si $f(a) = f(b)$ alors $y = f(a) = f(b)$ et $c = a$ convient. Supposons par exemple que $f(a) < f(b)$, le cas $f(a) > f(b)$ se traitant en considérant la fonction $-f$. Si $y = f(a)$, resp. $y = f(b)$ $c = a$, resp. $c = b$ convient, on peut donc fixer $y \in]f(a), f(b)[$. Soit alors

$$A = \{x \in [a, b] : f(t) < y \text{ pour tout } t \in [a, x]\}.$$

Comme $f(a) < y$ on a $a \in A$ donc A est non vide et A est majoré car $A \subset [a, b]$. D'autre part, A est un intervalle. En effet si $x \in A$ on a $f(t) < y$ pour tout $t \in [a, x]$ et donc aussi pour tout $t \in [a, x']$ si $a \leq x' \leq x$. D'après la caractérisation des intervalles dans la Proposition 3.9, on voit que A est un intervalle.

Soit $c = \sup A$ la borne supérieure de A . Intuitivement c est l'abscisse du premier point où le graphe de f franchit (vers le haut) la droite horizontale d'ordonnée y .

Comme $a \in A$ on a $a \leq c$ et comme b est un majorant de A on a $c \leq b$. Comme A est un intervalle, on a finalement que $A = [a, c]$ ou $A = [a, c[$.

Supposons d'abord que $c = b$. Comme $f(b) > y$ et f continue (à gauche) au point b on a $f(t) > y$ sur un petit voisinage de b , ce qui contredit que $A = [a, b[$ ou $A = [a, b]$.

Montrons que $c \neq a$. On a $f(a) < y$ et à nouveau par continuité (à droite) de f en a , il existe $\delta > 0$ tel que $f(t) < y$ pour $t \in [a, a + \delta]$. Ceci entraîne que $a + \delta \in A$ et donc a n'est pas un majorant de A , à fortiori $a \neq \sup A$.

On a donc montré que $c \in]a, b[$. Montrons par l'absurde que $f(c) = y$.

Supposons d'abord que $f(c) < y$. Par continuité de f en c , il existe $\delta > 0$ tel que $f(t) < y$ pour $t \in [c - \delta, c + \delta]$. Comme $A = [a, c[$ ou $A = [a, c]$ on en déduit que $c + \delta \in A$ ce qui contredit que $c = \sup A$.

Supposons maintenant que $f(c) > y$. Par continuité de f en c il existe $\delta > 0$ tel que $f(t) > y$ pour $t \in [c - \delta, c + \delta]$. Comme $A = [a, c[$ ou $A = [a, c]$ on a $f(t) < y$ pour $t \in [a, c - \delta/2[$, ce qui est une contradiction. On a donc bien montré par l'absurde que $f(c) = y$. $\square$

Remarque 10.3. En supposant que $f(a) < c < f(b)$, on pourrait aussi construire un point c tel que $f(c) = y$ en considérant l'ensemble

$$B = \{x \in [a, b] : f(t) < y \text{ pour tout } t \in [x, b]\}$$

et en prenant $c = \inf B$.

Corollaire 10.4 (Théorème des valeurs intermédiaires; deuxième énoncé). Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. On utilise la caractérisation des intervalles montrée dans la Proposition 3.9. Soit $\alpha < \beta \in f(I)$ et donc $\alpha = f(a), \beta = f(b)$ pour $a, b \in I$. Comme $\alpha \neq \beta$ on a $a \neq b$ et on peut supposer que $a < b$. Comme I est un intervalle $[a, b] \subset I$ et f est continue sur $[a, b]$. Par le Théorème 10.1 tout réel $y \in [\alpha, \beta]$ est de la forme $f(c)$ pour $c \in [a, b]$ et donc appartient à $f(I)$. On a donc montré que pour tous $\alpha < \beta \in f(I)$ on a $[\alpha, \beta] \subset f(I)$, c'est à dire que $f(I)$ est un intervalle, d'après la Proposition 3.9. $\square$

10.2. Théorème de Weierstrass.

Théorème 10.5. Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné I est bornée sur I .

Démonstration. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ est bornée sur } [a, x]\}.$$

L'ensemble A est non vide car $a \in A$ et majoré car $A \subset [a, b]$. Le même argument que dans la preuve du Théorème 10.1 montre que A est un intervalle. Soit $c = \sup A$. Montrons tout d'abord que $c = b$.

Supposons par l'absurde que $c < b$. Par la continuité de f en c , f est bornée sur un voisinage $[c - \delta, c + \delta]$ de c pour un $\delta > 0$ avec $c + \delta \leq b$. Comme $A = [a, c]$ ou $A = [a, c[$ on en déduit que f est bornée sur $[a, c + \delta]$ donc $c + \delta \in A$ ce qui contredit que $c = \sup A$.

Finalement par continuité (à gauche) de f en b , f est bornée sur $[b - \delta, b]$ pour δ assez petit, $b - \delta \in A$ donc finalement f est bornée sur $[a, b]$. $\square$

Remarque 10.6. On ne peut pas affaiblir les hypothèses : si $I = [0, 1]$ et

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^{-1} & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

f n'est pas continue sur I et f n'est pas bornée sur I . Si $I =]0, 1]$ la fonction $x \mapsto x^{-1}$ est continue mais non bornée sur I . Si $I = \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x$ est continue et non bornée sur I .

Théorème 10.7. [Théorème des bornes atteintes] Toute fonction continue sur un intervalle fermé et bornée est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue il existe $x_0, x_1 \in [a, b]$ tels que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [a, b].$$

Démonstration. Soit $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ la borne supérieure de f sur $[a, b]$, qui existe par le Théorème 10.5. Montrons par l'absurde qu'il existe

$x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = M$. Si $f(x) \neq M$ pour tout $x \in [a, b]$ alors la fonction

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

est définie et continue sur $[a, b]$. Par le Théorème 10.5 g est majorée sur $[a, b]$ et il existe donc $C > 0$ tel que

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} \leq C, \forall x \in [a, b]$$

ce qui entraîne que $f(x) \leq M - C^{-1}$ pour tout $x \in [a, b]$. $M - C^{-1}$ est donc un majorant de f sur $[a, b]$ ce qui contredit le fait que M est la borne supérieure (ie le plus petit des majorants) de f sur $[a, b]$.

On montre de la même manière l'existence de $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. $\square$

Remarque 10.8. *A nouveau on ne peut pas affaiblir les hypothèses : si $I =]0, 1]$ et $f(x) = x$, f est continue sur I mais sa borne inférieure 0 n'est pas atteinte. Si $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \arctan x$, f est continue sur I mais ses bornes inférieures et supérieures $-\pi/2$ et $\pi/2$ ne sont pas atteintes.*

Théorème 10.9. *[Théorème de Weierstrass] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $f([a, b])$ est l'intervalle $[m, M]$ où m resp. M est la borne inférieure resp. supérieure de f sur $[a, b]$.*

Démonstration. Par le Corollaire 10.4 $f([a, b])$ est un intervalle J . Par le Théorème 10.7 on a $J \subset [m, M]$ et $m, M \in J$. Par la Proposition 3.9 $[m, M] \subset J$ donc $J = [m, M]$. $\square$

Corollaire 10.10. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et monotone. Alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ resp. $[f(b), f(a)]$ si f est croissante resp. décroissante.*

La preuve est évidente.

11. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉRIVABLES

11.1. Extremas locaux et principe de Fermat.

11.1.1. *Extrema.* Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . On rappelle que si a est une des extrémités de I et si $a \in I$, alors ceci signifie que f est dérivable à gauche ou à droite en a .

Définition 11.1. *Soit x_0 un point intérieur à I , c'est à dire tel qu'il existe un voisinage de x_0 inclus dans I .*

(1) *on dit que x_0 est un minimum resp. maximum de f sur I si*

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ resp. } f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I.$$

(2) *on dit que x_0 est un minimum local resp. maximum local de f sur I si il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ et*

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ resp. } f(x) \leq f(x_0), \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

(3) *on dit que x_0 est un extremum (local) de f sur I si x_0 est un minimum ou un maximum (local) de f sur I .*

Définition 11.2. Un point x_0 intérieur à I est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.

Théorème 11.3. [Principe de Fermat] Tout extremum local de f sur I est un point critique.

Remarque 11.4. Un point critique n'est pas toujours un extremum local : 0 est un point critique mais n'est pas un extremum local de la fonction $x \mapsto x^3$. On reviendra sur la nature d'un point critique dans la Sous section 11.5.

Démonstration. Soit x_0 un extremum local de f sur I . Montrons par l'absurde que $f'(x_0) = 0$. Supposons que $f'(x_0) > 0$. Par la Proposition 8.16 on a

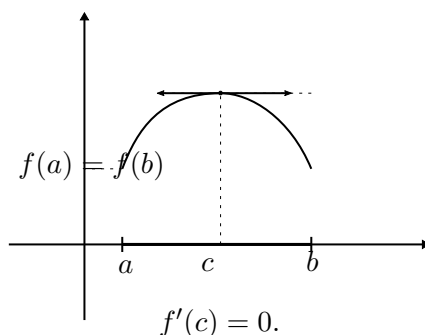
$$(11.1) \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0) + \epsilon(x)), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0.$$

Il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ et $f'(x_0) + \epsilon(x) > 0$ pour $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Par (11.1) on voit que $f(x) - f(x_0)$ a le même signe que $x - x_0$ pour $|x - x_0| < \delta$. Il en suit que $f(x) < f(x_0)$ resp. $f(x) > f(x_0)$ pour $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ resp. $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, et donc x_0 n'est pas un extremum local de f .

On raisonne de la même manière si $f'(x_0) < 0$. $\square$

11.2. Théorème des accroissements finis.

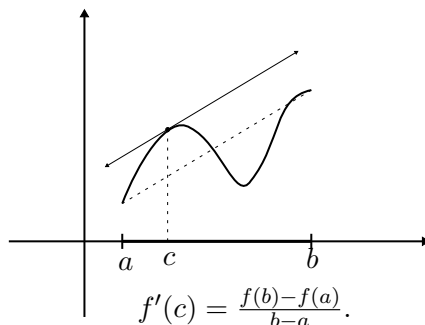
Proposition 11.5 (Théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Démonstration. Si f est constante sur $[a, b]$ alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Si f est non constante sur $[a, b]$. Par le Théorème de Weierstrass $f([a, b]) = [m, M]$ avec $m < M$ et donc soit m soit M est différent de $f(a) = f(b)$. Si par exemple $M \neq f(a)$, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$, c'est à dire que c est un maximum de f sur $[a, b]$. Par le principe de Fermat on a $f'(c) = 0$. On raisonne de la même manière si $m \neq f(a)$. $\square$

Théorème 11.6. [Théorème des accroissements finis] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$



Démonstration. On pose

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

On a $g(a) = g(b) = 0$, g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Par le Théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

on obtient le théorème. $\square$

Remarque 11.7. On peut décrire géométriquement ce théorème en disant qu'il existe un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la courbe.

On obtient immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 11.8. [Inégalité des accroissements finis] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Supposons que f' soit bornée sur $]a, b[$. Alors on a

$$|f(x) - f(x')| \leq \sup_{]a, b[} |f'| \times |x - x'|.$$

11.3. Formule de Taylor-Lagrange.

Théorème 11.9 (Formule de Taylor-Lagrange). Soit f une fonction $n + 1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I . Alors pour tout $a, x \in I$ $a \neq x$ il existe un c strictement compris entre a et x tel que :

(11.2)

$$f(x) = f(a) + \frac{(x - a)}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

La formule (11.2) s'appelle la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a . La fonction polynôme

$$x \mapsto f(a) + \frac{(x - a)}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

s'appelle le polynôme de Taylor de degré n de f en a .

Remarque 11.10. Le réel c dans (11.2) dépend à priori de a et x et n'est en général pas unique.

Supposons que $f(x) = P(x)$ est un polynôme de degré n . Comme $P^{(n+1)} = 0$ on obtient la formule

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On fixe $a \neq x \in I$ et on définit le réel K par l'égalité :
(11.3)

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} K,$$

c'est à dire que

$$K = \left(f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{1!} f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}.$$

On considère ensuite la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de la variable t définie par

$$g(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{(x-t)}{1!} f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} K \right).$$

Le choix du réel K entraîne que $g(a) = 0$ et on voit aussi que $g(x) = 0$. Par le Théorème de Rolle sur le segment d'extrémités a et x il existe c strictement compris entre a et x tel que $g'(c) = 0$.

Il reste à calculer la fonction g' . On a

$$\frac{d}{dt} \frac{(x-t)^k}{k!} = -\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!},$$

d'où l'on obtient que

$$g'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} K.$$

Comme $g'(c) = 0$, on obtient que $K = f^{(n+1)}(c)$ et en utilisant (11.3) :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad \square$$

Corollaire 11.11. [Formule de Taylor-Young] Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle ouvert I avec $f^{(n)}$ continue et $a \in I$. Alors on a :
(11.4)

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x),$$

où $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$. La formule (11.4) s'appelle la formule de Taylor-Young à l'ordre n au point a .

Démonstration. On applique la formule de Taylor-Lagrange (11.2) à l'ordre $n-1$. On obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c(x)),$$

où $c(x)$ est compris entre a et x . On a donc $\lim_{x \rightarrow a} c(x) = a$ et comme $f^{(n)}$ est continue au point a on a

$$f^{(n)}(c(x)) = f^{(n)}(a) + \epsilon(x),$$

ce qui montre (11.4). $\square$

11.3.1. *Formule de Taylor et développements limités.* Le Corollaire (11.11) montre qu'une fonction infiniment dérivable possède un DL à tout ordre au point a , que l'on peut calculer avec les dérivées successives de f au point a .

Il est important néanmoins de *ne pas confondre* formule de Taylor et développement limité. La formule de Taylor fournit un DL mais contient beaucoup plus d'informations. En effet la formule (11.3) est une identité, valable en tout point x de I , alors que (11.4) ne sert qu'à calculer une limite. Donnons un exemple pour illustrer cette remarque.

Montrons d'abord que :

$$(11.5) \quad |\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{3!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 au point $a = 0$ pour la fonction $\sin x$ donne l'identité :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \cos(c(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

pour $c(x)$ entre 0 et x , comme $\sin^{(3)}(x) = -\cos x$. Comme $|\cos(c(x))| \leq 1$ on obtient 11.5

L'inégalité implique le DL

$$(11.6) \quad \sin x = x + x^2 \epsilon(x),$$

mais contient beaucoup plus d'informations. Par exemple en prenant $x = 10^{-1}$ on déduit de (11.5) l'encadrement :

$$|\sin(10^{-1}) - 10^{-1}| \leq \frac{10^{-3}}{3!} \leq 2 \times 10^{-4},$$

et donc

$$0,0998 \leq \sin 10^{-1} \leq 0,1002,$$

ce qui est impossible à déduire de (11.6).

11.4. Les fonctions exponentielle, sinus et cosinus.

11.4.1. *La fonction exponentielle.* La fonction $x \mapsto e^x$ est définie au lycée comme l'unique fonction f solution de l'équation différentielle

$$(11.7) \quad f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1.$$

Cette définition est évidemment incomplète car on n'a aucune garantie que (11.7) possède une unique solution.

Une autre définition utilisée au lycée au siècle dernier est la suivante : on commence par définir la fonction logarithme par

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall x > 0,$$

ce qui nécessite d'avoir une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue, c'est à dire de construire l'intégrale de Riemann. On vérifie ensuite que $\ln x$ est continue, strictement croissante avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. C'est donc une bijection entre $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$. La fonction $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est alors définie comme la fonction réciproque de $\ln x$, c'est à dire par l'identité :

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x.$$

En utilisant la formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, on obtient bien que $(e^x)' = e^x$, et comme $\ln 1 = 0$ on a bien $e^0 = 1$.

Proposition 11.12. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$(11.8) \quad e^x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque 11.13. *A nouveau il est important de ne pas confondre la formule (11.8), qui permet par exemple de calculer e^x pour x fixé, avec le DL*

$$e^x = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + x^{N+1} \epsilon(x)$$

qui ne permet que de calculer des limites en 0.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre N en 0. On obtient :

$$e^x = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} e^{c_N(x)},$$

pour $c_N(x)$ compris entre 0 et x . Comme la fonction e^x est croissante on a $e^{c_N(x)} \leq e^{|x|}$, et donc

$$|e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|x|}.$$

On vérifie facilement que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} = 0$, ce qui montre la proposition. $\square$

11.4.2. Les fonctions sinus et cosinus. Les fonctions sinus et cosinus sont définies de manière intuitive à l'aide du cercle unité.

En sachant que $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ et $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$ on montre en utilisant à nouveau la formule de Taylor-Lagrange en 0 les formules suivantes, qu'il faut en fait considérer comme les *definitions* des fonctions sin et cos :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

La remarque 11.13 s'applique encore.

11.5. Nature des points critiques. On peut s'assurer qu'un point critique de f est un minimum ou un maximum local en regardant le signe de la dérivée seconde de f .

Théorème 11.14. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec f'' continue. Soit a un point critique de f intérieur à I . Alors si $f''(a) > 0$ resp. $f''(a) < 0$, a est un minimum resp. maximum local de f .

Démonstration. On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point a et on obtient

$$f(x) - f(a) = (x - a)^2 \left(\frac{f''(a)}{2!} + \epsilon(x) \right), \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

Si $f''(a) > 0$ resp. $f''(a) < 0$ on en déduit que pour x assez proche de a , $f(x) - f(a)$ est positif resp. négatif, et donc a est un minimum, resp. maximum local. $\square$

12. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Il est un peu pénible de donner la définition d'une équation différentielle.

En langage humain, il s'agit d'une équation, dont l'inconnue est une fonction d'une variable réelle (ou éventuellement plusieurs fonctions, on parle dans ce cas d'un système d'équations différentielles). Le point important est que cette équation relie la valeur de la fonction inconnue aux valeurs d'un certain nombre de ses dérivées *au même point*, l'équation devant être vérifiée en tout point d'un certain intervalle.

Voici la traduction en langage mathématique.

Définition 12.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ k fois dérivable sur I est solution de l'équation différentielle

$$(12.1) \quad F(t, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$$

si

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

L'équation (12.1) est appelée une équation différentielle d'ordre k .

Par exemple

$$y''(t) = \sin(y'(t)) + y^2(t) + \cos t,$$

est une équation différentielle d'ordre 2. L'équation

$$y'(t) = y(t + 1)$$

n'est pas une équation différentielle.

Résoudre l'équation (12.1) sur I revient à trouver toutes les solutions de (12.1) sur I . Le principe général est qu'il existe une infinité de solutions, qui est paramétrée par k constantes réelles arbitraires. L'immense majorité des équations différentielles ne possèdent pas de solutions explicites, exprimables en termes de fonctions usuelles.

Certaines équations différentielles sont si importantes en physique que leurs solutions portent des noms, comme les fonctions d'Hermite, ou les fonctions de Bessel, qui sont des exemples de *fonctions spéciales*. La fonction spéciale la plus simple est bien sûr la fonction exponentielle.

12.1. Equations d'ordre 1.

Lemme 12.2. *La solution générale de l'équation différentielle*

$$(12.2) \quad y'(t) = 0$$

sur un intervalle I est

$$y(t) = C, \quad C \text{ constante réelle arbitraire.}$$

Démonstration. Si $y(t) = C$ pour $t \in I$ on a bien $y'(t) = 0$. Si $y'(t) = 0$ pour tout $t \in I$, on a $y(t_1) = y(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in I$ par le théorème des valeurs intermédiaires. $\square$

Remarque 12.3. *Le résultat est évidemment faux si on remplace I par une union d'intervalles. Cette remarque stupide explique pourquoi on résout toujours les équations différentielles sur des intervalles, et non sur des unions d'intervalles.*

12.1.1. *Primitives.* L'équation différentielle un peu plus compliquée que (12.2) est

$$(12.3) \quad y'(t) = \varphi(t),$$

pour $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, par exemple continue, appelée le *second membre* de (12.3). Résoudre (12.3) revient à chercher les primitives de φ sur I , voir la Sous section 13.2.

Lemme 12.4. *Soit $y_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de φ sur I . Alors la solution générale de (12.3) sur I est :*

$$y(t) = y_0(t) + C, \quad C \text{ constante réelle arbitraire.}$$

Démonstration. On pose $y(t) = y_0(t) + u(t)$ et on se ramène à l'équation (12.2). $\square$

Le calcul des primitives d'une fonction sera décrit dans la Section 13. S'il est impossible d'exprimer les primitives d'une fonction en termes de fonctions usuelles, il y a deux démarches possibles.

Soit cette primitive se rencontre tellement souvent qu'il est utile de lui donner un nom, et d'en calculer des tables de valeurs. C'est le cas de la *fonction d'erreur de Gauss* :

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Sinon il est facile d'en calculer des valeurs approchées, par le calcul numérique d'intégrales.

Proposition 12.5. *La solution générale de l'équation*

$$(12.4) \quad y'(t) = ay(t), \quad a \neq 0$$

est

$$y(t) = Ce^{at}, \quad C \text{ constante réelle arbitraire.}$$

Démonstration. La preuve repose sur la construction de la fonction exponentielle, voir la Sous section 11.1. On pose $y(t) = e^{-at}u(t)$ et on a $y'(t) = -ay(t) + e^{-at}u'(t)$, l'équation (12.4) étant donc équivalente à $u'(t) = 0$. On applique ensuite le Lemme 12.2. $\square$

Proposition 12.6. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La solution générale sur I de l'équation

$$(12.5) \quad y'(t) = ay(t) + \varphi(t)$$

est donnée par

$$y(t) = Ce^{at} + y_0(t), \quad C \text{ constante réelle arbitraire,}$$

où $y_0(t)$ est une solution particulière de (12.5).

Démonstration. On pose $y(t) =: y_0 + u(t)$, on se ramène à l'équation $u'(t) = au(t)$. $\square$

Il reste à expliquer comment trouver une solution particulière de (12.5), par la méthode appelée *variation de la constante*. On cherche une solution $y_0(t)$ de (12.5) sous la forme

$$y_0(t) = C(t)e^{at},$$

la constante C dans la Proposition 12.5 devenant 'variable'. On a $y_0'(t) = C'(t)e^{at} + C(t)ae^{at}$ et donc $y_0'(t) - ay_0(t) = C'(t)e^{at}$. On obtient donc l'équation

$$C'(t) = e^{-at}\varphi(t),$$

et on cherche donc une primitive de $e^{-at}\varphi(t)$. Avec le lien entre primitive et intégrale qui sera vu dans la Section 13, ceci conduit à la formule suivante, qui exprime la solution générale du *problème de Cauchy*, où l'on fixe aussi la valeur de $y(t)$ en un point t_0 , ce qu'on appelle fixer une *condition initiale*.

Proposition 12.7. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + \varphi(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

a une unique solution sur I , donnée par :

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} \varphi(s) ds.$$

12.2. Solutions complexes. Il est utile de considérer aussi l'équation

$$(12.6) \quad y'(t) = ay(t) + \varphi(t),$$

où $a \in \mathbb{C}$, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ et on cherche bien sûr les solutions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes, la variable t restant par contre réelle. La solution de (12.6) se calcule comme dans le cas $a \in \mathbb{R}$, la fonction e^{at} étant maintenant une exponentielle complexe.

12.3. Equations d'ordre 2 à coefficients constants. On regarde maintenant les équations d'ordre 2 :

$$(12.7) \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

$$(12.8) \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \varphi(t),$$

a, b, c étant des constantes réelles (ou complexes), avec $a \neq 0$. L'équation (12.7) est appelée *équation homogène associée* à (12.8).

12.3.1. *Equation homogène.* On associe à (12.7) son *polynôme caractéristique* :

$$P(z) = az^2 + bz + c.$$

Il est clair que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors $y(t) = e^{zt}$ est une solution de (12.7). Le théorème suivant donne les solutions complexes de (12.7).

Théorème 12.8. *Supposons que $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique*

$$P(z) = 0.$$

- (1) *si $\Delta \neq 0$ et $z_1 \neq z_2$ sont les deux racines complexes de P , alors la solution générale complexe de (12.7) est*

$$y(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}, \quad C_1, C_2 \text{ constantes complexes arbitraires.}$$

- (2) *si $\Delta = 0$ et z est la racine double de P , alors la solution générale complexe de (12.7) est*

$$(12.9) \quad y(t) = (C_1 t + C_2) e^{zt}, \quad C_1, C_2 \text{ constantes complexes arbitraires.}$$

Démonstration. Il est facile de vérifier directement que toute fonction de la forme (12.9) est solution de (12.7). Soit maintenant $y(t)$ une solution de (12.7), $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ une racine de P et posons $y(t) =: u(t) e^{\lambda_1 t}$. On calcule

$$\begin{aligned} y'(t) &= u'(t) e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 u(t) e^{\lambda_1 t}, \\ y''(t) &= u''(t) e^{\lambda_1 t} + 2u'(t) \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 u(t) e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$0 = ay''(t) + by'(t) + cy(t) = (au''(t) + (2a\lambda_1 + b)u'(t))e^{\lambda_1 t} + u(t)P(\lambda_1)e^{\lambda_1 t}$$

et donc comme $P(\lambda_1) = 0$:

$$au''(t) + (2a\lambda_1 + b)u'(t) = 0.$$

En posant $v(t) = u'(t)$ on obtient $v'(t) = -(2\lambda_1 + a^{-1}b)v(t)$. Si $\lambda_1 = \frac{b}{2a}$, alors λ_1 est une racine double de P et donc $\Delta = 0$. Dans ce cas on obtient $v'(t) = 0$ donc $v(t) = C_2$, $u(t) = C_2 t + C_1$ et $y(t) = (C_2 t + C_1) e^{\lambda_1 t}$.

Si $\lambda_1 \neq \frac{b}{2a}$, alors $\Delta \neq 0$ et on obtient $v(t) = C_2 e^{-(2\lambda_1 + a^{-1}b)t}$, $u(t) = C_2 e^{-(2\lambda_1 + a^{-1}b)t} + C_1$ (pour une autre constante C_2) et donc

$$y(t) = C_2 e^{(-\lambda_1 + a^{-1}b)t} + C_1 e^{\lambda_1 t}.$$

En factorisant $P(z)$ comme $a(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$, on voit que $\lambda_1 + \lambda_2 = a^{-1}b$, donc $-\lambda_1 + a^{-1}b = \lambda_2$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Donnons maintenant la version réelle de ce théorème.

Théorème 12.9. *Supposons que $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique*

$$P(z) = 0.$$

- (1) *si $\Delta > 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont les deux racines (réelles) de P , alors la solution générale réelle de (12.7) est*

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 \text{ constantes réelles arbitraires.}$$

- (2) si $\Delta = 0$ et λ est la racine double de P , alors la solution générale réelle de (12.7) est

$$y(t) = (C_1 t + C_2) e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \text{ constantes réelles arbitraires.}$$

- (3) si $\Delta < 0$ et $\lambda \pm i\omega$ avec $\omega > 0$ sont les deux racines complexes de P , alors la solution générale réelle de (12.7) est

$$y(t) = e^{\lambda t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)), \quad C_1, C_2 \text{ constantes réelles arbitraires.}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\Delta > 0$, les deux racines de P sont donc réelles. La solution donnée dans le Théorème 12.8 est réelle si et seulement si $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Il en est de même si $\Delta = 0$. Si $\Delta < 0$, les deux racines complexes de P sont $\lambda \pm i\omega$ pour $\omega > 0$. La solution donnée dans le Théorème (12.8) est réelle si et seulement si $C_2 = \overline{C_1}$, c'est à dire que les solutions réelles de (12.7) sont de la forme

$$y(t) = \operatorname{Re}(C e^{(\lambda + i\omega)t}), \quad C \in \mathbb{C}.$$

Un calcul facile montre l'équivalence entre cette formule et celle donnée dans le théorème. $\square$

12.3.2. *Equation non homogène.* Passons maintenant à l'équation non homogène (12.8) :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \varphi(t),$$

où l'on supposera pour simplifier la discussion que a, b, c sont réels.

Théorème 12.10. La solution générale de (12.8) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (12.8) la solution générale de l'équation homogène associée (12.7).

Démonstration. Si $y_0(t)$ est une solution particulière de (12.8), on écrit $y(t) = y_0(t) + z(t)$ et on voit que $y(t)$ est solution de (12.8) si et seulement si $z(t)$ est solution de (12.7). $\square$

Il reste à trouver une solution particulière de (12.8), ce qui n'est possible avec des formules explicites que dans des cas simples.

Supposons que

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} (c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)),$$

$\lambda, \omega, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Notons que cette forme générale contient les cas particuliers

$$\varphi(t) = ce^{\lambda t}, \quad \varphi(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \varphi(t) = c,$$

obtenus en prenant respectivement $\omega = 0$, $\lambda = 0$ et $\omega = \lambda = 0$. On distingue trois cas :

- (1) si $z = \lambda + i\omega$ n'est pas racine de P , on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = e^{\lambda t} (d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t)), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

- (2) si $z = \lambda + i\omega$ est racine simple de P , on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = te^{\lambda t} (d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t)), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

- (3) si $z = \lambda + i\omega$ est racine double de P (et donc $\omega = 0$), on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = t^2 e^{\lambda t} (d_1 \cos(\omega t) + d_2 \sin(\omega t)), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Enfin si le second membre s'écrit comme $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ et si on connaît une solution particulière $y_i(t)$ de

$$ay_i''(t) + by_i'(t) + cy_i(t) = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2$$

alors $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ est solution particulière de (12.8).

13. INTÉGRALES ET PRIMITIVES

13.1. L'intégrale de Riemann. La définition de l'intégrale d'une fonction repose sur la notion d'aire d'un domaine du plan. On essaye donc d'associer à chaque sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ (ou plutôt à une classe de sous-ensembles raisonnables) un nombre réel positif $A(D)$, appelé l'*aire* de D .

Cette notion doit vérifier un certain nombre de propriétés. Tout d'abord l'aire d'un rectangle de côtés l et L est égale à $l \times L$. Ensuite si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, alors $A(D) = A(D_1) + A(D_2)$.

Ces deux propriétés fournissent une manière de définir, et aussi de calculer de manière approchée l'aire d'un domaine D . En effet si $R_i^\pm$ $1 \leq i \leq n^\pm$ sont des rectangles disjoints, avec

$$\bigcup_{i=1}^{n^-} R_i^- \subset D \subset \bigcup_{i=1}^{n^+} R_i^+,$$

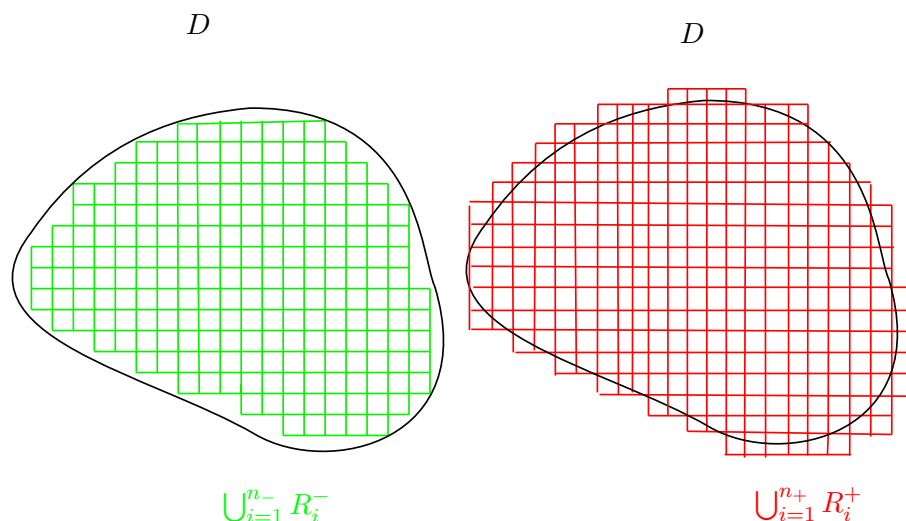
on a

$$\sum_{i=1}^{n^-} A(R_i^-) \leq A(D) \leq \sum_{i=1}^{n^+} A(R_i^+),$$

et si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver de telles familles de rectangles telles que

$$\sum_{i=1}^{n^+} A(R_i^+) - \sum_{i=1}^{n^-} A(R_i^-) \leq \epsilon,$$

alors on peut encadrer l'aire de D à ϵ près pour tout $\epsilon > 0$, ce qui est une façon de définir $A(D)$, en utilisant la propriété des intervalles emboîtés énoncée dans le Théorème 3.8.



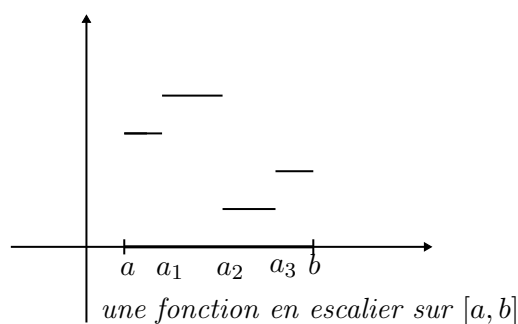
Pour définir l'intégrale d'une fonction sur un intervalle, on procède de la même façon, les unions de carrés étant remplacées par des fonctions *en escalier*.

13.1.1. Fonctions en escalier.

Définition 13.1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier si il existe $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et des réels $C_0, \dots, C_{n-1}$ tels que

$$(13.1) \quad f(x) = C_i, \text{ pour } x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

On note par $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.



L'intégrale de f sur $[a, b]$ est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{i=0}^{n-1} C_i \times (a_{i+1} - a_i).$$

Remarque 13.2. La collection des points $a_0, \dots, a_n$ s'appelle une subdivision de $[a, b]$. Une fonction en escalier peut s'écrire sous la forme (13.1) pour plusieurs subdivisions différentes. L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ ne dépend pas

du choix de la subdivision. Elle ne dépend pas non plus de la valeur de f aux points a_i , étant donné que l'aire d'un rectangle de largeur nulle vaut 0.

La variable x dans $\int_a^b f(x)dx$ est une variable muette, tout comme l'indice i dans une somme $\sum_{i=1}^n a_i$. On peut donc remplacer x par t , y etc et même écrire simplement $\int_a^b f dx$.

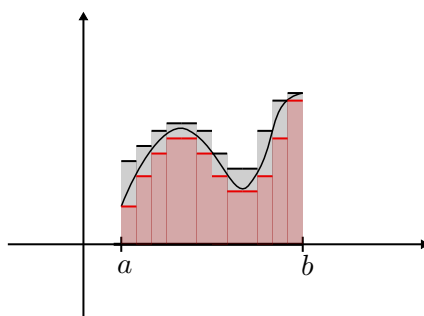
13.1.2. Intégrale de Riemann. Nous allons nous contenter de définir l'intégrale des fonctions continues par morceaux. Le procédé de mesure des aires par encadrement conduit à la définition suivante.

Pour deux fonctions $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on écrit $g \geq f$, resp. $g \leq f$ si $g(x) \geq f(x)$, resp. $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 13.3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors :

$$(13.2) \quad \sup_{g \in \mathcal{E}([a, b]), g \leq f} \int_a^b g(x) dx = \inf_{g \in \mathcal{E}([a, b]), g \geq f} \int_a^b g(x) dx =: I$$

Le réel I défini dans (13.2) se note $\int_a^b f(x) dx$ et s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$.



En d'autres termes pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier $g_\epsilon^\pm$ telles que si on pose

$$I_\epsilon^\pm = \int_a^b g_\epsilon^\pm dx$$

on a

$$g_\epsilon^-(x) \leq f(x) \leq g_\epsilon^+(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

$$0 \leq I_\epsilon^+ - I_\epsilon^- \leq \epsilon,$$

et le réel $\int_a^b f(x) dx$ appartient à l'intervalle $[I_\epsilon^-, I_\epsilon^+]$. On retrouve la méthode maintenant familière de construction d'un nombre réel à l'aide des intervalles emboîtés, ou de façon équivalente comme un sup ou un inf.

Plus généralement les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que (13.2) est vérifiée sont appelées fonctions *intégrables au sens de Riemann*. En plus des fonctions continues par morceaux, les fonctions monotones par morceaux sont intégrables au sens de Riemann.

Remarque 13.4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On vérifie facilement, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ que

$$\sup_{g \in \mathcal{E}([a,b]), g \leq f} \int_0^1 g(x) dx = 0, \quad \inf_{g \in \mathcal{E}([a,b]), g \geq f} \int_0^1 g(x) dx = 1,$$

et donc que f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Proposition 13.5. (1) si f, g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

(2) si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ on a :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(3)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

13.1.3. *Intégrales orientées.* Il serait plus naturel de noter l'intégrale de f sur un intervalle $I = [a, b]$ par $\int_I f(x) dx$, plutôt que $\int_a^b f(x) dx$, la propriété qu'il est essentiel de garder à l'esprit étant que $\int_I f(x) dx \geq 0$ si $f(x) \geq 0$ sur I .

Par contre la notation $\int_a^b f(x) dx$, a priori définie uniquement si $a \leq b$ s'étend facilement au cas $a \geq b$ en posant

$$(13.3) \quad \int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx,$$

qui est exactement l'analogue de la formule $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ dans la présentation intuitive du calcul vectoriel. On obtient alors les relations :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0,$$

(la première identité est appelée *relation de Chasles*), analogues de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

13.2. Primitives.

Définition 13.6. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $F' = f$ est appelée une primitive de f sur I .

D'après le Lemme 12.4, deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante. On utilise souvent la notation

$$\int f(x) dx$$

pour désigner une primitive (arbitraire) de f (l'intervalle I étant soit spécifié, soit égal à $\mathbb{R}$ tout entier). On obtient alors

$$\int \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

Voici une courte liste de primitives usuelles à connaître.

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ sur } \mathbb{R} \\ \int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq -1, \text{ sur }]0, +\infty[, \\ \int x^{-1} dx &= \ln(|x|) \text{ sur }]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[, \\ \int e^{ax} dx &= a^{-1} e^{ax} \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \int \sin(ax) dx &= -a^{-1} \cos ax, \quad \int \cos(ax) dx = a^{-1} \sin(ax) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x, \text{ sur }]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin(x) \text{ sur }]-1, 1[. \end{aligned}$$

13.3. Théorème fondamental du calcul intégral.

Théorème 13.7. [*Théorème fondamental du calcul intégral*] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur $[a, b]$ avec $F'(x) = f(x)$.

Démonstration. Montrons que F est dérivable en $x_0 \in]a, b[$ avec $F'(x_0) = f(x_0)$, le cas $x_0 = a, b$ se traitant de la même manière. On calcule

$$(13.4) \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Fixons $\epsilon > 0$. Par continuité de f au point x_0 , il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - x_0| \leq \delta$ alors $|f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Si $|x - x_0| \leq \delta$, on a donc $|f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$ pour tout t entre x_0 et x . En utilisant (13.4) on a

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \leq \epsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

c'est à dire que $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

L'intérêt principal du Théorème 13.7 est bien sûr de pouvoir calculer certaines intégrales à l'aide de primitives. Il ne faut néanmoins pas confondre intégrales et primitives : $\int_a^b f(x) dx$ est un nombre réel, $\int f(x) dx$ est une fonction.

Corollaire 13.8. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Cette identité s'étend évidemment au cas $a > b$, à l'aide de (13.3). On utilise souvent la notation :

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

13.4. Intégration par parties.

Proposition 13.9. [Formule d'intégration par parties] Soit f, g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration. On remarque que $(fg)' = f'g + fg'$ et on applique le Corollaire 13.8 à fg . $\square$

13.5. Changement de variables.

Proposition 13.10. Soit $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction de classe C^1 et $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$(13.5) \quad \int_a^b f \circ g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f et $G = F \circ g$. On a $G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f \circ g(x)g'(x)$. En appliquant deux fois le Corollaire 13.8 on obtient :

$$\int_a^b f \circ g(x)g'(x)dx = G(b) - G(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(u)du. \quad \square$$

Remarque 13.11. On retient d'habitude (13.5) en disant qu'on fait le changement de variable $u = g(x)$. La notation de Leibniz nous donne que $g'(x) = \frac{du}{dx}$, ce qui conduit à $g'(x)dx = du$. Quand $x = a$ resp. b , on a $u = g(a)$ resp. $g(b)$ ce qui fournit les bornes de l'intégrale en u .

Voici une autre version du changement de variables dans une intégrale.

Proposition 13.12. Soit $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ une bijection croissante de classe C^1 de dérivée non nulle. Alors pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue on a :

$$(13.6) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Démonstration. On applique la Proposition 13.10 en échangeant les rôles de x et u et en prenant $g = \varphi$. Comme $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ est une bijection croissante, on a $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$. $\square$

A nouveau on retient (13.6) en posant $x = \varphi(u)$ ce qui donne $dx = \varphi'(u)du$ à l'aide de la notation de Leibniz.

13.6. Longueur d' une courbe paramétrée. Soit $[a, b] \ni t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée et $C = \{M(t) : t \in I\}$ la courbe associée. On rappelle que $\vec{M}'(t) = (x'(t), y'(t))$ est le vecteur vitesse au temps t .

Définition 13.13. La longueur de la courbe C , notée $l(C)$ est définie par :

$$l(C) := \int_a^b \|\vec{M}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

On peut vérifier, à l' aide de la formule de changement de variables, que comme il se doit $l(C)$ est indépendant du choix du paramétrage $I \ni t \mapsto M(t)$.

14. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

14.1. Définitions.

14.1.1. L' espace $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est l' ensemble des n -uplets $X = (x_1, \dots, x_n)$. , en particulier le plan $\mathbb{R}^2$ est l' ensemble des couples $X = (x_1, x_2)$, x_1 et x_2 étant les *coordonnées canoniques* du point $X = (x_1, x_2)$.

On peut employer d' autres coordonnées que les coordonnées canoniques, comme par exemple les coordonnées associées à un autre repère (pas nécessairement orthonormé) ou encore les coordonnées polaires, ce qui conduit à l' image intuitive du plan $\mathbb{R}^2$ comme une feuille de papier *blanche*. Choisir un système de coordonnées revient à équiper cette feuille blanche d' une grille de coordonnées, et a priori il n' y a pas de raison de choisir un système de coordonnées plutôt qu' un autre.

14.2. Fonctions de n variables.

Définition 14.1. Une fonction de n variables réelles (à valeurs réelles) est une application

$$f : \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n). \end{array}$$

Dans la suite on se restreindra au cas $n = 2, 3$. Il est courant dans la littérature d' utiliser les notations (x, y) au lieu de (x_1, x_2) , et (x, y, z) au lieu de (x_1, x_2, x_3) .

14.2.1. Graphe.

Définition 14.2. Le graphe d' une fonction de deux variables $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est le sous ensemble $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\Gamma_f := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D, x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

De même que le graphe d' une fonction d' une variable réelle est typiquement une courbe dans $\mathbb{R}^2$, le graphe d' une fonction de deux variables réelles est typiquement une surface dans $\mathbb{R}^3$.

14.3. Lignes de niveau.

Définition 14.3. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble de niveau a de f est l'ensemble

$$f^{-1}(\{a\}) = \{(x_1, x_2) \in D : f(x_1, x_2) = a\}.$$

Remarque 14.4. On parle aussi de ligne ou de courbe de niveau, l'ensemble $f^{-1}(\{a\})$ étant typiquement une courbe dans $\mathbb{R}^2$. Il est conseillé de méditer cependant les exemples suivants : soit

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Alors $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$ (une courbe de niveau peut être vide), et $f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$ (une courbe de niveau peut être réduite à un point). Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = 0.$$

Alors $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^2$ (une courbe de niveau peut être une surface).

Il est facile de voir que deux courbes de niveau ne peuvent pas s'intersecter, sauf si elles sont confondues.

Lemme 14.5. Soit $a \neq b \in \mathbb{R}$. Alors $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$.

La preuve est évidente.

14.4. Fonctions partielles, dérivées partielles. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, ou pour simplifier la discussion on supposera que $D = I \times J$, où I, J sont deux intervalles. Pour $x_1 \in I$, resp. $x_2 \in J$ on peut fixer considérer les *fonctions partielles* :

$$f(x_1, \cdot) : J \ni y \mapsto f(x_1, y), \quad f(\cdot, x_2) : I \ni x \mapsto f(x, x_2).$$

On peut donc considérer f comme une famille, indexée par $x_1 \in I$ de fonctions d'une variable $f(x_1, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$. Il faut garder à l'esprit que ce point de vue est lié au choix des coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^2$. Si on change de coordonnées, par exemple en prenant un autre repère du plan, ou en utilisant des coordonnées polaires, les fonctions partielles changent.

14.4.1. Ensembles ouverts. On rappelle qu'on a défini dans la Sous section 4.2 la distance $d(X, X')$ entre deux points $X, X' \in \mathbb{R}^n$.

Définition 14.6. Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert si pour tout $X_0 \in D$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } d(X_0, X) < \delta, \text{ on a } X \in D.$$

Si f est définie sur un ensemble D ouvert et si $X = (x_1, x_2) \in D$, les fonctions partielles $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot, x_2)$ sont définies sur un voisinage de x_2 , resp. x_1 .

Définition 14.7. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur l'ouvert D . On dit que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sur D si pour tout $(x_1, x_2) \in D$ les fonctions partielles

$$x \mapsto f(x, x_2), \text{ resp. } y \mapsto f(x_1, y)$$

sont dérivables en $x = x_1$, resp. en $y = x_2$. Les dérivées respectives sont notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, resp. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ et appelées les dérivées partielles de f .

Définition 14.8. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur l'ouvert D . f est dite de classe C^1 sur D si f admet des dérivées partielles continues sur D .

14.5. Limites et continuité.

Définition 14.9. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur l'ouvert D , $X_0 \in D$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d(X, X_0) < \delta$ alors $|f(X) - L| < \epsilon$. On dit que f est continue sur D si pour tout $X_0 \in D$ on a

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0).$$

Notons que comme D est ouvert, on peut toujours choisir δ assez petit pour que F soit définie en tout point X tel que $d(X, X_0) < \delta$.

14.6. Opérations sur les fonctions continues. La Proposition 7.23 s'étend aux fonctions de deux variables, c'est à dire que somme, produit, quotient (quand il est défini) de fonctions continues sont continus. De même le Théorème 7.24 s' étend, c'est à dire que si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue avec $f(D) \subset I$, alors $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Ces remarques permettent de montrer qu'une fonction de deux variables est continue. On vérifie d'abord que les fonctions coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ sont continues. On en déduit ensuite que les fonctions *polynômes* de deux variables sont continues. Ensuite on procède, comme dans la Sous section 7.7.

14.6.1. Continuité partielle. La Définition 14.9 est la bonne notion de continuité d'une fonction de deux (ou plus généralement n variables. Il est important de ne pas la confondre avec une autre notion, celle de la *continuité partielle*, qui signifie que pour tout $X_0 = (a, b) \in D$ les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ resp. $y \mapsto f(a, y)$ sont continues au point a resp. b .

Cette notion correspond à regarder uniquement les limites de f quand on se déplace le long des axes de coordonnées. Il est facile de voir que la continuité implique la continuité partielle. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant. Soit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

On vérifie avec les remarques précédentes, que f est continue (et donc séparément continue) en tout point différent de $(0, 0)$. On a $f(0, x_2) = 0$ et $f(x_1, 0) = 0$ pour tout x_1, x_2 et donc f est séparément continue en $(0, 0)$. Si f était continue au point $(0, 0)$, on aurait en particulier $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = f(0, 0) = 0$, ce qui est impossible car $f(t, t) = \frac{1}{2}$ pour $t \neq 0$.

14.7. Formule de Taylor à l'ordre 1.

Théorème 14.10. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert D et $X_0 \in D$. Alors on a

$$f(X) = f(X_0) + (X - X_0) \cdot \vec{\nabla} f(X_0) + \|X - X_0\| \epsilon(X) \text{ avec } \lim_{X \rightarrow X_0} \epsilon(X) = 0,$$

où

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) \end{pmatrix}$$

est le gradient de f au point X_0 et on rappelle que

$$\|X\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

est la norme du vecteur X .

Démonstration. On note $X_0 = (x_0, y_0)$ et on applique le théorème des accroissements finis au point $y = y_0$ à la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$. On obtient

$$(14.1) \quad f(x_0, y) = f(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(y)),$$

où $\eta(y)$ est compris entre y_0 et y . Pour y fixé assez proche de y_0 , on applique les accroissements finis à la fonction $x \mapsto f(x, y)$ au point $x = x_0$. On obtient

$$(14.2) \quad f(x, y) = f(x_0, y) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y), y),$$

où $\xi(x, y)$ est compris entre x_0 et x . En utilisant aussi (14.1) on obtient :

$$(14.3) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y), y) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(y)),$$

Comme $\eta(y)$ est compris entre y et y_0 on sait que $\lim_{y \rightarrow y_0} \eta(y) = y_0$ et comme $s \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, s)$ est continue, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(y)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \epsilon_1(y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \epsilon_1(y) = 0.$$

De même comme $\xi(x, y)$ est compris entre x et x_0 on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} \xi(x, y) = x_0$ et comme $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est continue (comme fonction de deux variables), on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y), y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) + \epsilon_2(x, y) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \epsilon_2(x, y) = 0.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &\quad + (x - x_0) \epsilon_2(x, y) + (y - y_0) \epsilon_1(y). \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$\epsilon(x, y) := \frac{(x - x_0)}{\|X - X_0\|} \epsilon_2(x, y) + \frac{(y - y_0)}{\|X - X_0\|} \epsilon_1(y),$$

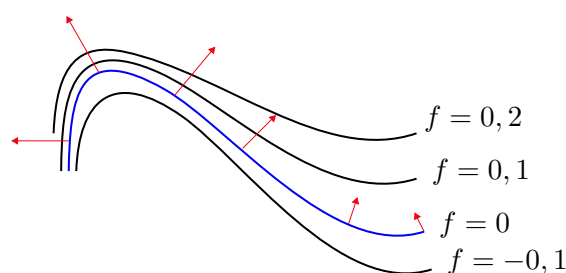
et en utilisant que

$$\frac{|x - x_0|}{\|X - X_0\|} \leq 1, \quad \frac{|y - y_0|}{\|X - X_0\|} \leq 1,$$

on obtient que $\lim_{X \rightarrow X_0} \epsilon(X) = 0$. Ceci termine la démonstration. $\square$

14.7.1. *Gradient et lignes de niveau.* La fonction $: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est un exemple d'un *champ de vecteurs*, que l'on représente graphiquement en dessinant en quelques points de D le vecteur $\vec{\nabla} f(X)$ d'origine X . Voici, sans démonstration, et énoncées de manière intuitive, quelques propriétés importantes du champ de vecteurs $\vec{\nabla} f$:

- (1) $\vec{\nabla} f(X)$ est orthogonal à la ligne de niveau passant par X ,
- (2) $\vec{\nabla} f(X)$ pointe dans la direction où f augmente,
- (3) $\|\vec{\nabla} f(X)\|$ est d'autant plus grand que f varie rapidement au voisinage de X .



les lignes de niveau et le champ de gradient de f

14.8. Applications.

14.8.1. Dérivées de fonctions composées.

Proposition 14.11. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'intervalle I avec $f(D) \subset I$. Alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur D et

$$\vec{\nabla}(g \circ f)(X) = g'(f(X)) \vec{\nabla} f(X), \quad X \in D.$$

Démonstration. C'est un simple calcul en utilisant la dérivée des fonctions composées pour calculer les dérivées partielles de $g \circ f$. $\square$

Proposition 14.12. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage avec $M(t) = (x(t), y(t))$ de classe C^1 sur l'intervalle I . Alors $f \circ M : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$(f \circ M)'(t) = \vec{\nabla} f(M(t)) \cdot \vec{M}'(t), \quad t \in I.$$

Démonstration. On utilise le même argument que dans la preuve de la Proposition 14.11. $\square$

14.8.2. Extrema et points critiques.

Définition 14.13. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$. On dit que $X_0 \in D$ est un

- (1) maximum resp. minimum de f sur D si

$$f(X) \leq f(X_0) \text{ resp. } f(X) \geq f(X_0) \quad \forall X \in D,$$

- (2) maximum *resp.* minimum local de f sur D si il existe $\delta > 0$ tel que
 $f(X) \leq f(X_0)$ *resp.* $f(X) \geq f(X_0) \forall X \in D$ avec $\|X - X_0\| < \delta$.

Théorème 14.14. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et $X_0 \in D$ un extremum local de f . Alors

$$\vec{\nabla} f(X_0) = \vec{0},$$

et on dit que X_0 est un point critique de f .

Remarque 14.15. Comme pour les fonctions d'une variable, les extrema locaux sont des points critiques, mais la réciproque est fausse. Par exemple la fonction

$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

possède le point critique $(0, 0)$, qui n'est pas un extremum local.