Université de Paris XI **L1PCST – 1er semestre 2024-2025**
Mathématiques **PCDD101**

Feuille d'exercices 1

Ensembles et logique

Exercice 1.1.— **1.** Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$.

2. Enumérer les éléments de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Représenter les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$(]0, 1[\cup[2, 3[) \times [-1, 1],$$
$$(\mathbb{R}\setminus]0, 1[) \times ((\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \cap [0, 2]).$$

Exercice 1.2.— **1.** Ecrire la négation de « $P \Rightarrow Q$ ».

2. Ecrire à l' aide de quantificateurs l ' assertion suivante : « le carré de tout nombre réel est positif »

3. Même question pour « pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».

4. Même question pour « pour tout entier n il existe un unique nombre réel x tel que $\exp(x)$ est égal à n ».

Exercice 1.3.— **1.** (raisonnement direct). Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

2. (disjonction des cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l' entier $n(n+1)$ est pair (distinguer les cas n pair et n impair).

3. (contraposée ou absurde). Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Utiliser que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

4. (absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n' est pas un entier.

5. (contre exemple) Est ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

6. (récurrence) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

7. (récurrence) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Université de Paris XI **L1PCST – 1er semestre 2024-2025**
Mathématiques **PCDD101**

Feuille d'exercices 2

Sup, inf, nombres complexes

Exercice 2.1.— Pour chacun des sous ensembles de $\mathbb{R}$ suivants, dire en justifiant vos affirmations s' il est majoré, minoré, donner si elles existent sa borne supérieure et inférieure, et préciser s' il possède un maximum et un minimum.

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \{(-\frac{1}{2})^n : n \in \mathbb{N}\}, \\
(b) & \{3 + n + \frac{2}{n} + (-1)^n n : n \in \mathbb{N}\}, \\
(c) & \{n + \frac{1}{p} : n, p \in \mathbb{N}^*\}, \\
(d) & \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}, \\
(e) & \{\frac{1}{n} + \frac{(-1)^p}{p} : n, p \in \mathbb{N}^*\}, \\
(f) & \{q \in \mathbb{Q} : (1 + q^2) \leq 2\}.
\end{array}
$$

Exercice 2.2.— Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$(1 - \mathrm{i})^3,\ \frac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}},\ \mathrm{e}^{-24\mathrm{i}\pi} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi}.$$

Exercice 2.3.— Calculer le module et l' argument (pris dans $[0, 2\pi[$) des nombres complexes suivants :

$$1 + \mathrm{i},\ \sqrt{3} + \mathrm{i},\ 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ \frac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}.$$

En déduire les valeurs de $\cos \pi/12$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 2.4.— Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$15 - 8\mathrm{i},\ 1 + \mathrm{i},\ 5 + 12\mathrm{i},\ 3 - 2\mathrm{i}.$$

Exercice 2.5.— Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

$$
\begin{aligned}
& z^2 + z + 1 = 0, \\
& z^2 - (1 + 2\mathrm{i})z - (1 + \mathrm{i}) = 0, \\
& z^2 - 5(1 + \mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = 0, \\
& 2z^2 + (3 - \mathrm{i})z + 1 - \mathrm{i} = 0.
\end{aligned}
$$

Université de Paris XI **L1PCST – 1er semestre 2024-2025**
Mathématiques **PCDD101**

Feuille d'exercices 3

Graphes de fonctions.

Exercice 3.1.— Soit f la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$. On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Dessiner le graphe $\mathcal{C}$ de f.

2. **a.** Dessiner l'image $\mathcal{C}_1$ du graphe de cette courbe par la symétrie d'axe Ox.

b. Donner la fonction f_1 dont elle est le graphe.

c. Pouvez-vous exprimer cette nouvelle fonction à l'aide de la fonction f ?

3. Mêmes questions avec la symétrie d'axe Oy et la symétrie d'axe $y = x$.

Exercice 3.2.— Régions du plan délimitées par un graphe

1. Tracer rapidement le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$. Représenter sur le dessin les deux ensembles

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \sin(x)\} \text{ et } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sin(x)\}.$$

2. Dessiner de même les ensembles suivants.

$$\begin{array}{ll} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2x + 3\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x^3\} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}. & \end{array}$$

Exercice 3.3.— Position relative d'un graphe et d'une droite.

1. Montrer que le polynôme du second degré $x^2 - 3x + 4$ reste > 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire la position relative de la parabole d'équation $y = x^2 + 4$ et la droite d'équation $y = 3x$.

3. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = 3x$. Pour un point $M = (a, b)$, rappeler ce que veut dire M est *au dessus* de D, M est *au dessous* de D, M est à *gauche* de D, M est à *droite* de D. Donner des exemples de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (polynômiales de degré 2) telles que le graphe de f est *au dessus* de D, *au dessous* de D, *à gauche* de D, *à droite* de D ou enfin : ni au dessus, ni au dessous de D.

Exercice 3.4.— Intersection de deux graphes.

La parabole d'équation $y = x^2$ peut-elle couper une droite $y = ax + b$ en trois points distincts ? Même question en remplaçant la parabole par l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 3.5.—

Montrer que le cercle trigonométrique (centré sur l'origine, et de rayon 1) est la réunion de deux graphes de fonctions simples. Donner des formules pour ces fonctions.

Feuille d'exercices 4

Limites, dérivées, tangentes, DL d'ordre 1, théorème des accroissements finis

Exercice 4.1.— À l'aide des techniques de Terminale, étudier les limites suivantes. On explicitera les limites classiques utilisées.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}.$$

$$\lim_{x\to 0,1,+\infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{3x^4+2}e^x, \quad \lim_{x\to+\infty}(3x^4-2x^2)e^{-x}.$$

Exercice 4.2.— Calculer les dérivées des fonctions suivantes. Préciser à chaque fois pour quels nombres x le calcul est valide. Donner une équation de la tangente au graphe pour l'abscisse indiquée entre crochets. Avant de traiter f_3 et f_4 rappeler la formule de la dérivée d'une fonction composée $f \circ g$.

$$f_1(x) = \frac{9x^2-4}{8x^3+6} \;\; [-1] \; ; f_2(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} \;\; [1] \; ; f_3(x) = x^3 \mathrm{e}^{\sin x} \;\; [\pi] \; ; f_4(x) = \ln(\ln(x)) \;\; [\mathrm{e}] \; .$$

Réponses : les dérivées sont

$$f_1'(x) = -3\,\frac{x\left(6\,x^3-8\,x-9\right)}{\left(4\,x^3+3\right)^2}, \; f_2'(x) = \frac{(5x+1)(x-1)^2}{2x\sqrt{x}}, \; f_3'(x) = (3x^2+x^3\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}, \; f_4'(x) = \frac{1}{x\ln x}.$$

Exercice 4.3.— Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$. Montrer que le graphe de f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.

Exercice 4.4.— Écrire les développements limités à l'ordre 1 (approximations affines + restes) des fonctions suivantes :

(1) sinus, cosinus et tangente au point $a = 0$;
(2) exponentielle au point $a = 0$;
(3) logarithme et racine carrée au point $a = 1$.

Exercice 4.5.— Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}.$$

Exercice 4.6.— Pour x proche de -1, déterminer le signe de la quantité

$$Q(x) = \frac{2x + \sqrt{x+5}}{\ln(2+x)} - 2$$

En déduire la position des points M du graphe de $f(x) = \frac{2x+\sqrt{x+5}}{\ln(2+x)}$ par rapport à la droite horizontale d' équation $y = 2$ (lorsque l'abscisse de M est assez proche de -1).

Exercice 4.7.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

1. Montrer que le graphe de f passe par le point $A = (0, 1)$. Donner une équation de la tangente au graphe Γ_f en A. Esquisser alors le tracé de Γ_f.

2. Ecrire le DL(1) de f en 0.

3. Montrer que pour $x > 0$ assez petit on a $f(x) > 1 + x$, et aussi $f(x) > \mathrm{e}^x$. Comment traduire ces inégalités géométriquement (c'est à dire en termes de graphes de fonctions) ?

Exercice 4.8.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 + x + \ln|x| - 6\ln|x + 2|$.

Donner le domaine de définition de f et tracer son graphe (on précisera les tangentes horizontales et les asymptotes).

Exercice 4.9.—

1. Pour $x > 0$, appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x + 1$ pour la fonction ln. En déduire une majoration de $\ln(x + 1) - \ln(x)$.

2. En déduire la limite de cette quantité quand x tend vers $+\infty$. Comment s'interprète ce résultat sur le graphe de la fonction ln ?

Exercice 4.10.—

1. Montrer que, pour tous réels a et b, on a $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.

2. Interpréter graphiquement le cas où $b = 0$.

Exercice 4.11.—

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle l'équation $f(x) = 1$ admet (au moins) 5 solutions distinctes. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet (au moins) 4 solutions distinctes.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet (au moins) 3 solutions distinctes. Montrer que l'équation $f'(x) = \frac{1}{2}$ admet (au moins) 2 solutions distinctes.

Feuille d'exercices 5

Calculs et utilisations de développements limités

Exercice 5.1.— Formule de Taylor.

1. Écrire la formule de Taylor en $x_0 = 0$ à l'ordre 2 (pour une fonction générale $x \mapsto f(x)$).

2. À partir de cette formule, retrouver les DL(2) en 0 des fonctions $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \cos(x)$.

Exercice 5.2.— Somme et produit. En utilisant les formules vues en cours, calculer les développements limités des fonctions suivantes, en 0 à l'ordre 2.

(1) $\sin(x) + \cos(x)$; $e^x + \frac{1}{1-x}$

(2) $\sin(x)\cos(x)$; $\frac{e^x}{1-x}$.

Exercice 5.3.— Composition. En utilisant les formules vues en cours (DL(2) usuels à connaître), calculer les développements limités des fonctions suivantes, en 0 à l'ordre 2.

(1) e^{5x} ;

(2) $\sin(x^2)$;

(3) $\mathrm{e}^{\sin(x)}$;

(4) $\frac{1}{1+\sin(x)}$;

(5) $\ln(\cos(x))$.

Exercice 5.4.— Limites à l'aide de développements limités. À l'aide de développements limités, trouver les limites des fonctions suivantes.

(1) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\mathrm{e}^x - \sin(x) - 1}$ en 0 ;

(2) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0 ;

(3) $\dfrac{\tan(3\ln(\cos(x)))}{\ln(\cos(\tan(3x)))}$ en 0.

Exercice 5.5.— Manipulations de fonctions epsilon.

Les calculs ci-dessous se lisent *de gauche à droite.*

Dans le membre de *gauche*, la notation ε désigne à chaque fois une certaine fonction (presque toujours de la variable x) qui n'est pas explicitée, mais qui par hypothèse tend vers 0 quand son argument tend vers 0.

On demande de justifier que les fonctions notées $\varepsilon(x)$ dans le membre de *droite* tendent vers 0 quand x tend vers 0. Pour cela il sera nécessaire de calculer explicitement les $\varepsilon(x)$ du membre de droite.

(1) $x\exp(x) = \varepsilon(x); \sin(x) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(x) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(x) - \varepsilon(x) = \varepsilon(x)$

(2) $(2 + \varepsilon(x))\varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(x)\varepsilon(x) = \varepsilon(x); \varepsilon(\varepsilon(x)) = \varepsilon(x)$

(3) $\big(1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) + \big(2 - 3x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) = 3 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$

(4) $\big(1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) + \big(2 - 3x + x\varepsilon(x)\big) = 3 - 2x + x\varepsilon(x); 3x^2 + x^2\varepsilon(x) = \varepsilon(x) = x\varepsilon(x)$

(5) $\big(2 - x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) - \big(1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) = 1 - 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$

(6) $\big(-1 + 2x - 3x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) - \big(1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) - \big(-2 + x - 4x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) = x^2\varepsilon(x)$

(7) $x^2\big(x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) = x^2\varepsilon(x); \big(1 + x + x\varepsilon(x)\big)\big(1 - x + x\varepsilon(x)\big) = 1 + x\varepsilon(x)$

(8) $\big(3 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) + \big(1 + x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) = 3 + x - 7x^2 + x^2\varepsilon(x)$

(9) $\big(1 + x + x\varepsilon(x)\big)\big(2 + 3x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) = 2 + 5x + x\varepsilon(x)$

(10) $\big(1 + x + x\varepsilon(x)\big)\big(3x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)\big) = 3x + 7x^2 + x^2\varepsilon(x)$

(11) Pour $y = 3x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ on a $-4 + 2y - y^2 + y^2\varepsilon(y) = -4 + 6x - 5x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Exercice 5.6.— Développements limités et allure des fonctions

Calculer les développements limités des fonctions ci-dessous en 0 à l'ordre 2, et en déduire l'allure du graphe de ces fonctions au voisinage de 0 (équation de la tangente et position par rapport à celle-ci).

(1) $\exp(x) + \sin(x)$;

(2) $\exp(x)\sin(x)$;

(3) $\sqrt{1 + 2x}\,\ln(1 + x)$;

(4) $\ln(1 + x + x^2)$;

(5) $\exp(\sqrt{1 + x})$.

Exercice 5.7.— Développements limités en $x_0 \neq 0$.

Donner le développement limité à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$,

1. en calculant les dérivées successives de f.

2. en effectuant le changement de variable $x = u + \pi/2$, et en utilisant des développements limités connus.

Exercice 5.8.— Limites à l'aide de développements limités.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(3+x)^{\frac{1}{2}} - (7+x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}x}{\ln(x)\sin(\pi x)}$.

Exercice 5.9.— Développements limités et signe à la limite. Déterminer le signe de $f(x) = \dfrac{1+x}{2} + \ln(\cos(x-1)) - \sqrt{x}$ pour x suffisamment proche de $x_0 = 1$.

Exercice 5.10.— Développements limités en $x_0 \neq 0$ et allure des fonctions. Déterminer l'allure du graphe (tangente et position par rapport à celle-ci) au voisinage du point x_0 pour les fonctions suivantes.

(1) $f_1 : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ en $x_0 = 1$.

(2) $f_2 : x \mapsto \sin(\ln(x))$ en $x_0 = 1$.

(3) $f_3 : x \mapsto \cos^2(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Pouvait-on donner la tangente et la position du graphe par rapport à celle-ci sans calculer le DL(2) ?

Exercice 5.11.— Comparaison de fonctions. On considère les deux fonctions $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln x$.

1. Montrer que les deux graphes ont la même tangente au point d'abscisse 1. Quelle est la position des deux graphes par rapport à cette tangente ?

2. Comparer les deux fonctions au voisinage de $x = 1$: lequel des deux graphes est au-dessus de l'autre ?

3. Tracer rapidement sur un même dessin les deux graphes ainsi que la tangente.

Exercice 5.12.— Asymptotes à un graphe de fonction.

Montrer que chacune des fonctions suivantes admet une asymptote quand $x \to +\infty$, en donner une équation, et enfin trouver la position du graphe par rapport à son asymptote.

(1) $g_1 : x \mapsto -3x + 2 + \sin \dfrac{1}{x}$;

(2) $g_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+1}$;

(3) $g_3 : x \mapsto (x+1)\exp(\dfrac{1}{x-1})$.

Exercice 5.13.— Asymptotes à une courbe paramétrée.

On considère la courbe paramétrée $M(t)$ définie par $x(t) = \frac{2t^2}{1+t}$ et $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$. Montrer que la courbe image de $M(t)$ admet une droite asymptote D quand $t \to \pm\infty$. On donnera une équation de D et on précisera la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exercice 5.14.— DLs et allure locale des courbes paramétrées. Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, effectuer un DL de $x(t)$ et $y(t)$ au temps t_0 considéré pour en déduire une équation de la tangente en $M(t_0)$ et la position de la courbe relativement à cette tangente :

(1) $x(t) = -e^t$, $y(t) = \cos(t)$ en $t_0 = 0$;

(2) $x(t) = \sqrt{1+2t}$, $y(t) = \sin(t)$ en $t_0 = 0$;

(3) $x(t) = 1 - \ln(t)$, $y(t) = 1 + \ln(2t-1)$ en $t_0 = 1$;

(4) $x(t) = 2t + t^2$, $y(t) = 1 + 3t + t^2$ en $t_0 = -1$.

Exercice 5.15.— Fonctions convexes.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, on suppose que pour tout réel x on a $f''(x) > 0$.

a. Montrer alors qu'aucune droite du plan ne coupe le graphe de f en trois points distincts ou plus. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

b. Montrer que chaque tangente au graphe de f coupe le graphe en exactement un point. (Même indication.)

2. Donner un exemple explicite de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne vérifie pas les propriétés géométriques ci-dessus.

Exercice 5.16.— Points d'inflexion.

On suppose que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction trois fois dérivable, avec $f''(0) = 0$ et $f'''(0) > 0$. Montrer que la courbe représentative de f traverse sa tangente en $(0, f(0))$, et donner précisément la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0 en un point d'abscisse x petite, selon le signe de x.

Université de Paris XI — **L1PCST – 1er semestre 2024-2025**
Mathématiques — **PCDD101**

Feuille d'exercices 6

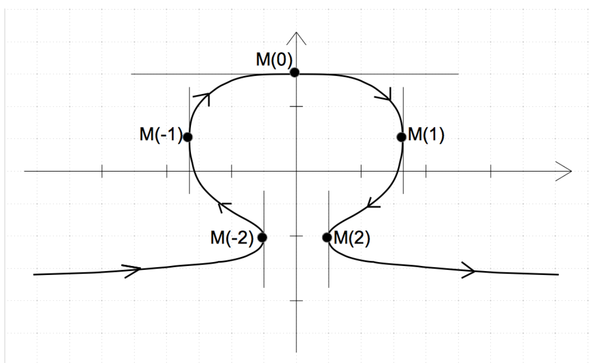
Courbes paramétrées

Exercice 6.1.— Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le *tableau de variation conjoint* est le suivant :

t	-2		-1		0		1		2
$x'(t)$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	4
	4								4
$x(t)$		$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	
					0				
			2						2
$y(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	
	-2						-2		
$y'(t)$	9	$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	9

On tracera notamment les vecteurs vitesse et les tangentes donnés par le tableau.

Exercice 6.2.— On considère une courbe paramétrée $M(t)_{t\in\mathbb{R}}$ dont le tracé est le suivant :



Donner le tableau de variation conjoint de cette courbe.

Exercice 6.3.— On considère la courbe paramétrée définie par $M(t) = (x(t), y(t))$ avec $x(t) = \sin(\frac{t}{4})$ et $y(t) = \sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'on obtient la même courbe image si on se restreint aux valeurs de t dans l'intervalle $[-2\pi, 6\pi]$.

2. On se restreint pour l'instant aux valeurs de t dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.
 a. Donner dans un même tableau les variations de $x(t)$ et $y(t)$.
 b. Tracer les tangentes à la courbe aux points $M(0)$, $M(\frac{\pi}{2})$, $M(\pi)$, $M(\frac{3\pi}{2})$, $M(2\pi)$.
 c. Donner l' équation de la tangente à la courbe en $t = \frac{2\pi}{3}$. Tracer cette tangente.
 d. Tracer la portion de courbe obtenue lorsque t décrit $[0, 2\pi]$. On note $\mathcal{C}$ cet ensemble.
 e. Calculer $\sin(t)$ en fonction de $\sin(\frac{t}{4})$ pour $t \in [0, 2\pi]$. En déduire une fonction f dont $\mathcal{C}$ est le graphe.

3. On voudrait tracer le reste de la courbe.
 a. Calculer $M(-t)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? En déduire le tracé de la courbe correspondant à $t \in [-2\pi, 0]$.
 b. De même, calculer $M(t + 4\pi)$ en fonction de $M(t)$. À quelle opération géométrique correspond cette formule ? Quelle portion de courbe peut-on maintenant tracer ?
 c. Finir le tracé de la courbe.

Exercice 6.4.— Quand on trace avec une calculatrice la courbe paramétrée d'équation $\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, on trouve le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

1. Expliquer pourquoi l'image de cette courbe paramétrée γ est incluse dans le cercle $\mathcal{C}$.

2. Donner le tableau de variation conjoint de γ. Quelle partie du cercle $\mathcal{C}$ est décrite ?

Exercice 6.5.— Etudier les courbes paramétrées $t \mapsto (x(t), y(t))$ suivantes. On cherchera notamment les symétries, les tangentes horizontales ou verticales, les asymptotes (préciser les équations). Enfin tracer la courbe ainsi que la tangente T demandée.

1. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 - 3t$. Equation de la tangente T en $t = 2$?

2. $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = \dfrac{1+t}{t^2}$. Equation de la tangente T en $t = 1$?

3. $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \frac{t}{2} + \sin(t)$. Equation de la tangente T en $t = \frac{\pi}{2}$? Tracer d'abord la portion de courbe pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer ensuite $M(t + 2\pi)$ en fonction de $M(t)$, et interpréter géométriquement la formule obtenue. En déduire le reste du tracé.

4. $x(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$. Equation de la tangente T en $t = 1$? Comment se comporte la courbe quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$? Avec quelle direction s'approche-t-elle du point limite ?

Exercice 6.6.—
On pose $x(t) = \frac{\cos(t)}{2+\cos(t)}$ et $y(t) = \frac{\sin(t)}{2+\cos(t)}$, on étudie la courbe paramétrée $M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ et on note $\mathcal{E}$ la courbe image.

1. Montrer que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à une droite qu'on précisera. Vérifier que $M(t + 2\pi) = M(t)$. Expliquer comment obtenir le tracé de $\mathcal{E}$ à partir du tracé de $M(t)$ sur $[0, \pi]$.

2. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$. Dresser le tableau de variations conjoint (pour $t \in [0, \pi]$). Quelle est l' équation des tangentes T, T' en $t = 0, \frac{\pi}{2}$? Tracer $\mathcal{E}$ ainsi que T, T'.

3. Montrer qu'un point $M = (x, y)$ du plan est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l' équation
$$\frac{9}{4}(x + \frac{1}{3})^2 + 3y^2 = 1$$
La courbe $\mathcal{E}$ *est une* ellipse.

Exercice 6.7.— Tangente en un point où la dérivée s'annule.
On étudie la courbe définie par $x(t) = 1 + t^2 - t^3$, $y(t) = t^2 + t^3$.

1. Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$. Montrer que $t = 0$ est le seul temps où $\vec{V}(t) = \vec{0}$.

2. Pour $t \neq 0$ calculer la pente $p(t)$ de la sécante $\Delta = \big(M(0)M(t)\big)$. Calculer $\lim_{t\to 0} p(t)$. En déduire que la courbe admet une tangente en $t = 0$ et en donner une équation cartésienne.

Exercice 6.8.— On fixe un nombre complexe non nul $z = a + ib$. On pose $Z(t) = \mathrm{e}^{zt}$, autrement dit $Z(t) = \mathrm{e}^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$. On étudie la courbe paramétrée définie (sur $\mathbb{R}$) par le point $M(t)$ d'affixe $Z(t)$. Soit $x(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(bt), y(t) = \mathrm{e}^{at}\sin(bt)$.

1. Quelle est la courbe image lorsque $b = 0$? et lorsque $a = 0$?

2. On revient au cas général. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$. Vérifier que l'affixe de $\vec{V}(t)$ est $z\mathrm{e}^{zt}$. La courbe a-t-elle un point stationnaire ?

3. Dans cette question on suppose que $a = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{12}), b = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{12})$.

a. En utilisant le cosinus de l'angle double, donner une formule qui relie $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\cos(\dfrac{\pi}{6})$. En déduire que $\cos(\dfrac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Calculer alors $\sin(\dfrac{\pi}{12})$, puis montrer que $\tan(\dfrac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$.

b. On pose $\tau = \frac{4\pi}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Montrer que $M(t + \tau)$ se déduit de $M(t)$ par une homothétie (qu'on précisera). Comment obtenir le tracé de la courbe géométrique $\{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ à partir du tracé de la courbe $\{M(t)\}_{t\in[0,\tau]}$?

c. Comparer la longueur du rayon-vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ à celle du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$.

d. Quelles sont les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand $t \to \pm\infty$? La courbe admet-elle une branche infinie quand $t \to +\infty$? une direction asymptotique ?

e. Donner le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$ (pour $t \in [0, \tau]$). Donner l'équation de la tangente T_0 à la courbe en $t = 0$. Tracer la courbe (pour $t \in [0, \tau]$).

Feuille d'exercices 7

Valeurs intermédiaires, accroissements finis, Taylor-Lagrange

Exercice 7.1.— Montrer que l'équation

$$x(\cos x)^9 + x^2 \sin x + 1 = 0$$

possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$. On énoncera avec soin le théorème utilisé.

Exercice 7.2.— Dans cet exercice, on énoncera avec soin chacun des théorèmes utilisés.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\cos(x) + 1$.

1. Calculer f' et f''. Faire le tableau de variation de f' et de f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Montrer que f a un unique maximum entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur).

2. a) Montrer que $-3 \leq f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

b) En déduire que $1 + x - \frac{3x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3. a) Montrer que f s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]\pi/2, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$.

b) En déduire que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]\pi/2, 2\pi[$.

Exercice 7.3.— Soit $f :] - \frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$.

(a) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$ pour f.

(b) En déduire que

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}, \ \forall\, x \in [0, +\infty[.$$

Exercice 7.4.— Montrer que pour tout $0 < a < b$ on a

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Exercice 7.5.—

Montrer les encadrements suivants :

$$(1) \quad 1 + x \leq \mathrm{e}^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{|x|}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$(2) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \ x > 0,$$

$$(3) \quad |\sin x - x + \frac{x^3}{6}| \leq \frac{|x|^5}{120}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.6.— On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de g.

2. Montrer que l' équation $g(x) = 0$ possède exactement trois solutions réelles, notées $a < b < c$.
3. Calculer $g(\frac{1}{2})$. Donner un encadrement de b de largeur $\frac{1}{2}$.

Feuille d'exercices 8

Equations différentielles.

Exercice 8.1.— Premier ordre à coefficients constants

1. Résoudre l' équation différentielle $x' - 2x = -1$.

2. Déterminer l'unique fonction $x : t \mapsto x(t)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = 3x(t) \text{ (ou : } x' = 3x, \text{ou : } x' - 3x = 0) \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

3. Résoudre de même $\begin{cases} x' = \ln(2)x \\ x(1) = -4 \end{cases}$.

4. Résoudre l'équation différentielle $x' - 2x = \mathrm{e}^{2t}$ puis le problème différentiel $\begin{cases} x' = 2x + \mathrm{e}^{2t} \\ x(1) = 3\mathrm{e}^2 \end{cases}$.

Exercice 8.2.— Deuxième ordre à coefficients constants

1. (cas homogène) Pour chacune des équations suivantes déterminer l'ensemble de toutes les solutions possibles :

(1) $x'' - 3x' + 2x = 0$

(2) $x'' - 4x' + 4x = 0$

(3) $x'' - 4x' + 5x = 0$

2. (avec second membre) Pour chacune des équations suivantes déterminer l'ensemble de toutes les solutions possibles :

(1) $x'' - 3x' + 2x = 2$, puis $x'' - 3x' + 2x = 2\mathrm{e}^{-t}$ et enfin $x'' - 3x' + 2x = \mathrm{e}^t$

(2) $x'' - 4x' + 4x = \mathrm{e}^t$, puis $x'' - 4x' + 4x = \mathrm{e}^{2t}$

(3) $x'' - 4x' + 5x = \sin(2t)$, puis $x'' - 4x' + 5x = \sin(t)$

Exercice 8.3.— Conditions initiales

Dans la deuxième question de l'exercice précédent déterminer l'unique solution telle que $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

Exercice 8.4.— Premier ordre à coefficients quelconques

Résoudre l'équation $tx'(t) = 2x(t) - t$. Expliciter la solution vérifiant $x(1) = 0$.

Feuille d'exercices 9

Primitives, intégrales. Intégration par parties, changements de variables.

Rappel. La fonction arctan : $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ *est appelée* arctangente. *Elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *et prend des valeurs comprises entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$. *Enfin elle est caractérisée par l' équivalence*

$$\theta = \arctan(x) \iff 1)\ \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } 2)\ \tan(\theta) = x.$$

Exercice 9.1.— Calculer les primitives des fonctions suivantes. On indiquera sur quel intervalle on travaille.

$a)\quad x \mapsto x(x^3+1) \qquad b)\quad x \mapsto \dfrac{1}{x-3} \qquad c)\quad x \mapsto \sin(2x - \pi/8) \qquad d)\quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

$e)\quad x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x+4} \qquad f)\quad x \mapsto \sin^2(x) \qquad g)\quad x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x+\pi/2)} \qquad h)^*\quad x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$

Exercice 9.2.— Calculer les intégrales suivantes.

$$a)\quad \int_1^2 \frac{x^3+3x^2-5x+4}{x^4} dx \qquad b)\quad \int_0^1 \frac{x-2}{x^2-4x-12} dx \qquad c)^*\quad \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$$

Exercice 9.3.— Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties.

$$\text{a)} \int_1^e \sqrt{x} \ln x \, dx \text{ puis } \int_1^e \ln x \, dx, \ \text{b)} \int_0^1 (x+1)e^{-x} \, dx \text{ puis } \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} \, dx,$$

$$\text{c)} \int_0^{\pi/2} (x^2 - 3x + 2) \sin x \, dx, \ \text{d)} \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx, \ \text{e)} \int_0^{\pi/3} \tan x \, dx$$

Exercice 9.4.— À l'aide de changements de variables simples, calculer les primitives ou les intégrales suivantes. On pourra à chaque fois commencer par écrire la fonction $f(t)$ à intégrer sous la forme $f(t) = g(u(t))u'(t)$, en explicitant les deux fonctions $g(u)$ et $u(t)$.

Pour les primitives, on précisera l'intervalle sur lequel on travaille.

$$a)\quad \int^x \frac{dt}{t \ln^2 t} \qquad b)\quad \int^x \sin^3 t \, dt \qquad c)\quad \int^x \frac{\cos t}{2+\sin t} \, dt$$

$$d)\quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} \, dt \qquad e)\quad \int_3^8 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} \, dt \qquad f)\quad \int_0^{\ln(2)} \frac{4e^{2t} - 2e^{3t}}{1+e^t} \, dt$$

Exercice 9.5.— Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable, avec $f'''(x)$ continue sur $\mathbb{R}$. On introduit trois expressions :

$$R_0(x)=\int_0^x f'(t)\,dt\ ,\ R_1(x)=\int_0^x (x-t)f''(t)\,dt\ ,\ R_2(x)=\int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)\,dt.$$

1. Montrer que $f(x)=f(0)+R_0(x)$.

2. En utilisant une intégration par parties relier $R_1(x)$ et $R_0(x)$. En déduire que

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+R_1(x)\ .$$

3. En utilisant une intégration par parties relier $R_2(x)$ et $R_1(x)$. En déduire que

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+R_2(x)\ .$$

4. Application : on considère $f(x)=\mathrm{e}^x$. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de e^x, notamment la partie quadratique $P_2(x)$. Expliciter le reste intégral $f(x)-P_2(x)=R_2(x)$ (comme ci-dessus). En déduire que $1+x+\frac{1}{2}x^2$ est une approximation de e^x à 10^{-3} près, pour peu que $|x|\leq$: compléter en justifiant !

Feuille d'exercices 10

Fonctions de deux variables : aperçu.

Exercice 10.1.— Modélisation par des fonctions de deux variables
Donner une formule pour chacune des fonctions suivantes.

1. L'aire $A(\ell_1, \ell_2)$ d'un rectangle en fonction des longueurs ℓ_1, ℓ_2 des côtés.

2. L'energie cinétique $E(m, v)$ d'un mobile en fonction de sa masse m et de sa vitesse v.

3. Le volume $V(r, h)$ d'un cylindre en fonction du rayon de sa base r et de sa hauteur h.

4. La surface extérieure $S(x, y)$ d'un parallélépipède rectangle (un carton d'emballage !) de volume $1m^3$, en fonction de la largeur x et de la longueur y de sa base, exprimées en mètres.

Exercice 10.2.— Ensembles de définition
Pour chacune des formules suivantes en les variables x, y, déterminer l'ensemble de définition de la fonction correspondante, et dessiner cet ensemble dans le plan $\mathbb{R}^2$ des variables x et y.

1) $\ln(2x-y)$ 2) $\dfrac{xy^2}{2x-y}$ 3) $\ln(\sin(x)-y)$ 4) $\dfrac{xy^2}{\sin(x)-y}\sqrt{x+y+1}$ 5) $\ln(\sin(x)-y)\times\sqrt{x}$

6) $\sqrt{x+y+1}\times\ln(2x-y)$ 7)* $\sin\left(\dfrac{1}{4-x^2-y^2}\right)$

Exercice 10.3.— Applications partielles
Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, déterminer :

(1) l'application partielle par rapport à la 1ère variable au point $A = (1, -1)$;

(2) l'application partielle par rapport à la 2ème variable au point $A = (1, -1)$.

On ne donnera pas seulement la formule, mais aussi le domaine de définition.

Exercice 10.4.— Lignes de niveau
Pour chacune des fonctions suivantes, écrire l' équation de la ligne de niveau 0 et l' équation de la ligne de niveau 1. Décrire (et si possible nommer) chacune des lignes de niveau, esquisser leur tracé.

$$f_1(x,y) = 2x+3y-4, f_2(x,y) = x^2+y^2, f_3(x,y) = y-x^2, f_4(x,y) = 1+x^2+x-2y+y^2,$$
$$f_5(x,y) = \sin\left(\frac{1}{4-x^2-y^2}\right), f_6(x,y) = xy, f_7(x,y) = \mathrm{e}^{xy}, f_8(x,y) = x\mathrm{e}^{y-\sqrt{1+x^2}}.$$

Feuille d'exercices 11

Fonctions de deux variables : dérivées partielles, gradient, formule de Taylor, lignes de niveau

---

Exercice 11.1.— Calculs de dérivées partielles
Calculer les deux dérivées partielles des fonctions suivantes (quand elles existent) :

$$2x - 3y + 1 \ , \ \mathrm{e}^x + \sin(y) \ , \ \mathrm{e}^x \sin(y) \ , \ x^4 y - 2x^2 y^3 - 1$$
$$\sqrt{x+y+1} \ , \ \ln(2x-y) \ , \ \frac{xy^2}{2x-y} \ , \ \ln\left(\cos(x) - y\right) \ , \ (1-xy)\mathrm{e}^{x-2y} \ , \ \sin\left(\frac{1}{1-x^2-y^2}\right).$$

Exercice 11.2.— Une question de définition
Soit $f(x,y) = x^2y^3$. On demande à deux étudiants de calculer le nombre $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$: qui a raison ?

- Le premier dit : "$f(y,x) = y^2x^3$, je dérive par rapport à x et j'obtiens $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 3y^2x^2$".
- Le second dit : "je calcule la dérivée de f par rapport à x, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3$, puis j'échange x et y, et j'obtiens $\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 2yx^3$".

Exercice 11.3.— Conditions sur les dérivées partielles
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$.

1. Quel est le comportement de $f(x,0)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$?

2. Quel est le comportement de $f(0,y)$ quand y parcourt $\mathbb{R}$?

3. Montrer qu'il existe une fonction dérivable $\psi(y)$ telle que $f(x,y) = \psi(y)$. Décrire les lignes de niveau de $f(x,y)$.

Exercice 11.4.— Formule de Taylor et variation locale
On considère la fonction $f(x,y) = \cos(y) - y\mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Calculer les deux dérivées partielles de $f(x,y)$ en $(0,0)$.

2. Ecrire la formule de Taylor (à l'ordre 1) pour $f(x,y)$ en $(0,0)$.

En déduire que pour tout r assez petit, la fonction $f(x,y)$ prend une valeur $> f(0,0)$ en exactement l'un des quatre points $A_r = (r,0), B_r = (0,r), C_r = (-r,0), D_r = (0,-r)$. Comparer aussi les valeurs de $f(x,y)$ aux trois autres points avec la valeur $f(0,0)$.

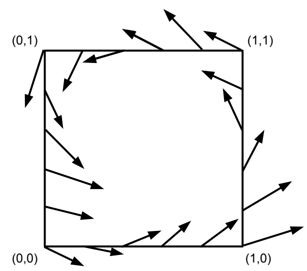
Exercice 11.5.— Orientation du gradient et variation

Soit $f(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer qu'alors $f(1,0) > f(0,0)$. Comment se traduit géométriquement l'hypothèse faite ici ? (considérer le signe d'un produit scalaire du gradient).

2. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) > 0$ pour tout $y \in [0,1]$. Montrer qu'alors $f(1,1) > f(0,0)$. Comment se traduit géométriquement l'hypothèse faite ici ? (considérer le signe d'un produit scalaire du gradient).

3. Les vecteurs gradients de la fonction $f(x,y)$ peuvent-ils former le champ évoqué dans la figure ci-dessous ?



Exercice 11.6.— Dérivées partielles et approximations affines

1. Donner l'expression de la diagonale $d(x,y)$ d'un rectangle de côtés x et y.

2. On considère un rectangle de côtés x=30 cm et y=40 cm. En utilisant l'approximation affine de d (c'est-à-dire en négligeant le reste dans la formule de Taylor), donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utiliser la calculatrice !). Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Exercice 11.7.— Dérivées partielles et approximations affines

On considère un container en carton de volume $1m^3$, dont la base a pour dimension $x = 2m$ et $y = 1m$. On veut fabriquer un deuxième container en carton de même volume, avec une base de côtés 195cm et 95cm. Donner (sans calculatrice) une estimation de la différence de surfaces extérieures entre les deux containers à l'aide de l'approximation affine. Calculer la nouvelle surface à l'aide de la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Exercice 11.8.— Équations de droites et de plans, fonctions affines

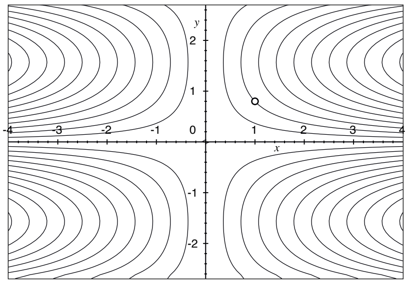
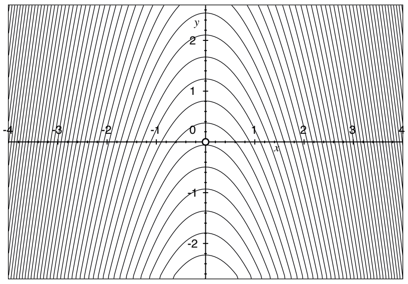
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x,y), donner l'équation de la droite passant par le point $(-3,2)$ et orthogonale au vecteur $(23,34)$ (justifier).

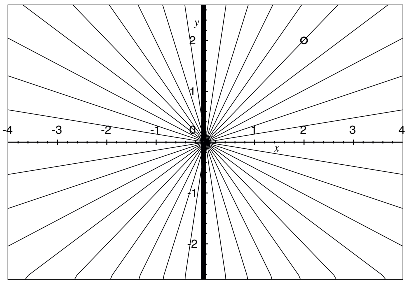
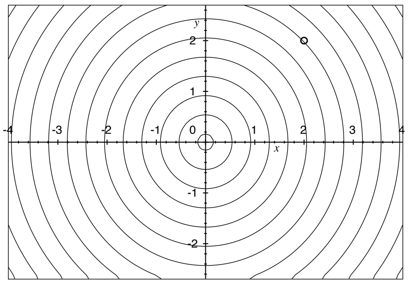
Exercice 11.9.— Dérivées partielles et formule de Taylor, gradient et lignes de niveau

1. Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles au point indiqué et écrire la formule de Taylor (en variables h, k). Récrire cette formule en introduisant le vecteur gradient.

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = x\sin(y) \text{ au point } (1,\pi/4); & f_2(x,y) = \tan(x^2+y) \text{ au point } (0,0); \\ f_3(x,y) = \arctan(y/x) \text{ au point } (2,2); & f_4(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \text{ au point } (2,2). \end{array}$$

2. Ci-dessous on a représenté les lignes de niveau de ces fonctions. Tracer sur le dessin la tangente à la ligne de niveau passant par le point indiqué, puis déterminer une équation de cette droite.

Exercice 11.10.— Conditions sur le gradient

Soit $f(x,y) = 1 - x + 9y + x^2 + 3xy + 4y^2$

1. Calculer $\overrightarrow{\text{Grad}}_{(x,y)}f$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Montrer que l'ensemble des points (x,y) où le gradient est orthogonal à $(2,1)$ est une droite D, dont on donnera une équation cartésienne.

3. Donner l' équation de la courbe de niveau $\mathcal{C}$ passant par $(1,-1)$, vérifier que D passe par $(1,-1)$, puis donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

Exercice 11.11.— Graphe d'une fonction d'une variable et ligne de niveau
On considère la fonction $f(x,y) = xe^y - \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

1. Calculer les dérivées partielles de $f(x,y)$ en tout point (x,y).

2. Déterminer l'unique point critique de $f(x,y)$.

3. On considère la fonction d'une variable $x \mapsto g(x) = \ln[\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x}]$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de g. Soit d'autre part $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ la ligne de niveau 0 de $f(x,y)$: donc $\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0\}$.

a. Déterminer le domaine de définition de g et calculer $f(x, g(x))$. En déduire que le graphe $\mathcal{C}$ est contenu dans la ligne $\mathcal{L}$.

b. Donner deux points de $\mathcal{L}$ qui ne sont pas sur $\mathcal{C}$.

c. Calculer la quantité

$$Q(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$$

Expliquer ce résultat en interprêtant la quantité $Q(x)$ comme un produit scalaire convenable.

d. Vérifier que $(1,0) \in \mathcal{C}$, et donner la tangente à la ligne de niveau $\mathcal{L}$ en ce point par deux méthodes différentes.

Exercice 11.12.— Etude par les courbes de niveaux

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout niveau c, la courbe de niveau $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = c\}$ est une droite complète de $\mathbb{R}^2$, d' équation $y = K - x$ (où la constante K dépend du niveau considéré c).

Montrer qu'alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = \varphi(x+y)$. Quelle est la direction du gradient en tout point ?

Université de Paris XI **L1PCST – 1er semestre 2024-2025**
Mathématiques **PCDD101**

Feuille d'exercices 12

Dérivée le long d'une courbe. Points critiques. Extremums.

Exercice 12.1.— Dérivées le long d'une courbe, dérivées composées

1. Soit f une fonction de deux variables. Soit alors g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(t^2, 3t+2)$. Donner l'expression de $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Même question pour les fonctions

$$h(t) = f(t,t)\ ;\ j(t) = f(\sin(t), \cos(t))\ ;\ k(t) = f(e^t \sin(t), \ln(1+t^2))$$

2. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Exprimer les dérivées partielles de la fonction $f(xy)$ à l'aide de la dérivée f'.

b. Même question pour la fonction $f(xy\cos(xy^2))$.

Exercice 12.2.— Après avoir calculé les dérivées partielles, déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

1. $f_1(x,y) = 1 + 2(x-1)^2 + 3(y-2)^2$.

2. $f_2(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$.

3. $f_3(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

4. (plus difficile) $f_4(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$.

5. Revenons à la fonction f_1. Quelle est la valeur minimale prise par f_1 sur $\mathbb{R}^2$? En quel point du plan $\mathbb{R}^2$ cette valeur est-elle atteinte ? Retrouver alors le résultat de la question 1.

Exercice 12.3.— Point critique : étude par restriction à des droites

On considère la fonction définie par

$$f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. On veut montrer que f admet un seul point critique.

a. Etudier la fonction $g(x) = f(x,x)$. En déduire que $f(x,y)$ admet sur la droite d'équation $y = x$ un et un seul point critique (dont les coordonnées sont entières). Quelle est la valeur en ce point critique ?

b. En factorisant la différence $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, montrer que $f(x,y)$ n'admet pas de point critique en dehors de la droite d'équation $y = x$, et conclure.

3. Reprendre l'étude de $g(x)$ et en déduire que le point critique de f n'est pas un maximum (local ou absolu).

4. Etudier la fonction $h(x) = f(x, 4-x)$ (on pourra factoriser $h'(x)$ par $2x - 4$). En déduire que le point critique de f n'est pas un minimum (local ou absolu).

5. La fonction f présente t-elle un extremum (local ou absolu) sur son domaine de définition ?

Exercice 12.4.— Lignes de niveaux de formes quadratiques

1. Montrer que la courbe $t \mapsto (\cos(t), 2\sin(t))$ reste à un niveau constant - lequel ?- pour la fonction $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Deviner alors une paramétrisation de l'ensemble de niveau 1 de $f(x, y)$.

2. Montrer que la fonction $f(x, y) = x^2 + 2xy + 10y^2$ est de la forme $X^2 + 9y^2$, où X s'exprime simplement en fonction de x et y. En déduire que la courbe $t \mapsto (3\cos(t) - \sin(t), \sin(t))$ reste à un niveau constant pour la fonction $f(x, y)$. Comment décrire paramétriquement l'ensemble de niveau $c > 0$ quelconque ?

3. Montrer que la courbe $t \mapsto (t, \frac{1}{t})$ reste à un niveau constant - lequel ?- pour la fonction $f(x, y) = 3xy$. En déduire une paramétrisation de l'ensemble de niveau $c \neq 0$ de $g(x, y) = x^2 - y^2$ (on pourra poser $X = x + y, Y = x - y$).

Exercice 12.5.— Pour chacune des formes quadratiques suivantes :

a. obtenir une forme canonique (somme de carrés ou produit de deux termes linéaires) ;
b. donner l'allure des courbes de niveau passant par un point proche de $(0, 0)$;
c. dire si $(0, 0)$ est un maximum, un minimum, ou un point col.

$q_1(x, y) = 4xy$; $q_2(x, y) = x^2-2xy+2y^2$; $q_3(x, y) = -4x^2-12xy-8y^2$; $q_4(x, y) = 4x^2-12xy+9y^2$

Exercice 12.6.— Point critique des polynômes de degré 2. On considère les fonctions

$f_1(x, y) = 1+x-y+x^2-2xy+2y^2$, $f_2(x, y) = 1+2x+y-x^2-xy-y^2$, $f_3(x, y) = 1-x+y+x^2+4xy+y^2$

Pour chacune des fonctions $f_i(x, y)$:

1. Déterminer le gradient de $f_i(x, y)$ en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

2. Quel est l'unique point critique $A = (a, b)$ de $f_i(x, y)$?

3. Etudier le signe de $f_i(x, y) - f_i(a, b)$ (pour cela on pourra considérer les variables $h = x - a$ et $k = y - b$ puis la forme quadratique $Q(h, k) = f_i(a+h, b+k) - f_i(a, b)$). La fonction $f_i(x, y)$ admet-elle un extremum local ou global ?

Exercice 12.7.— Ensemble de niveau singulier et point critique

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables. On suppose qu'il existe deux courbes de classe C^1, notées $t \mapsto M_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ et $t \mapsto M_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ (définie sur $\mathbb{R}$), telles que

(1) La fonction $f(x, y)$ est identiquement nulle sur les deux courbes : $f(x_1(t), y_1(t)) = 0$ et $f(x_2(t), y_2(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) En $t = 0$ on a $M_1(0) = M_2(0) = (a, b)$, et les vecteurs vitesse $\vec{V_1}(0), \vec{V_2}(0)$ sont non nuls, de direction différente (non parallèlles)

1. Dessiner l'allure de l'ensemble de niveau 0 au voisinage de (a, b). Quelles sont les contraintes sur le vecteur gradient de f en (a, b) ? En déduire que (a, b) est un point critique.

2. Application : étude de $f(x, y) = (2 - x^2 - y^2)(y - x^2)$.

a. Montrer que l'ensemble de niveau 0 de $f(x, y)$ est la réunion de deux courbes. En déduire que $f(x, y)$ possède deux points critiques et déterminer ces points critiques.

b. Étudier le signe de $f(x, y)$ en fonction de x et y pour (x, y) proche d'un des points critiques trouvés ci-dessus : faire un dessin dans le plan (Oxy) en indiquant les régions où $f > 0$, $f = 0$, $f < 0$. Le point $(1, 1)$ est-il un maximum ou un minimum local ?