INTRODUCTION À LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS SUR DES ESPACES-TEMPS COURBES
Christian Gérard, Cours de M2 deuxième semestre

I. Présentation

La théorie quantique des champs est d'habitude formulée sur l'espace temps plat de Minkowski.

Si l'on veut prendre en compte l'effet d'un champ gravitationnel intense, ou encore faire quelques pas vers la gravité quantique, il est indispensable de considérer aussi des champs quantiques sur des espaces temps (variétés Lorentziennes) *courbes*. On découvre alors des difficultés et des phénomènes nouveaux :

par exemple les symétries de l'espace temps de Minkowski (groupe de Poincaré) permettent de donner un sens clair à la notion d'*état de vide*, sur laquelle repose entre autres toute la théorie des champs perturbative. Cette notion disparait sur un espace-temps courbe général sans symétrie particulière.

De même la présentation usuelle de la théorie des champs dans Minkowski repose largement sur la transformation de Fourier, qui disparait elle aussi dans le cas courbe, et doit être remplacée par de l'analyse microlocale.

Parmi les phénomènes nouveaux, le plus célèbre est sans doute l'*effet Hawking*, qui prédit qu'un trou noir peut émettre des particules quantiques, contrairement à la situation classique où rien de peut s'échapper de l'horizon du trou noir.

Le but de ce cours est de donner une introduction rigoureuse et accessible pour des mathématiciens à quelques aspects de la théorie des quantique des champs sur des espaces temps courbes. En particulier nous décrirons les progrès remarquables liés à l'utilisation de l'analyse microlocale, suite aux travaux fondamentaux de M. Radzikowski.

II. Plan du cours

I. **Théorie quantique des champs libres dans Minkowski.**

- l'équation de Klein-Gordon (resp. Dirac) comme évolution symplectique (resp. unitaire).
- quantification bosonique (resp. fermionique) des champs de Klein-Gordon (resp. de Dirac).
- état de vide dans Minkowski, champs en espace-temps, fonction à deux points.

II. **Cadre algébrique.**

- relations de commutation et d'anti-commutation canonique.
- algèbres CCR et CAR.
- états quasi-libres, états quasi-libres purs, espaces de Fock.

III. **Théorie quantique des champs en espace-temps courbe.**

- variétés Lorentziennes, causalité, surfaces de Cauchy.
- espaces-temps globalement hyperboliques.
- équations de Klein-Gordon et de Dirac sur un espace-temps globalement hyperbolique.

- courants conservés, fonctions de Green avancées et retardées, fonction de Pauli-Jordan.
- l'espace des solutions de Klein-Gordon (resp. Dirac) comme espace-symplectique (resp. hermitien).
- Champs en espace-temps, fonctions à deux points.

IV. **Etats de Hadamard.**

- rappels d'analyse microlocale, front d'onde d'une distribution, théorème de propagation des singularités de Hörmander.
- états de Hadamard comme substituts des états de vide en espace-temps courbe, existence du tenseur d'énergie impulsion renormalisé.
- construction d'états de Hadamard et exemples.

III. Références

[1] J. Derezinski, C. Gérard : *Mathematics of Quantization and Quantum Fields*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (2013).

[2] C. Bär, N. Ginoux, F. Pfäffle : *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, Springer (2007).

[3] *Quantum Field Theory on Curved Spacetimes*, C. Bär, K. Fredenhagen editors, Springer Lecture Notes in Physics, Springer (2009).

[4] S. Fulling : *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press (1989).