Université Paris-Sud • Centre d'Orsay

PCST L2 UE 255, Calcul différentiel pour la physique (2010)

Corrigé du Contrôle 1

1. (a) On calcule

$$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \; y'(t) = 3\sin t^2 t \cos t,$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos^2 t \sin^2 t = 9\cos^2 t \sin^2 t.$$

Pour $t \in [0, \pi/2]$ on a $\cos t \sin t \geq 0$ donc

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 3\cos t \sin t.$$

$$l(\gamma) = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t dt = [\frac{3}{2}\sin^2 t]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.$$

(b) : On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Circ}(\vec{F}, \gamma) &= \int_0^{\pi/2} x^2(t)x'(t) + y(t)y'(t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} -3\cos^8 t \sin t + 3\sin^5 t \cos t dt \\
&= \left[\tfrac{1}{3}\cos^9 t + \tfrac{1}{2}\sin^6 t\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2. On intègre d'abord en y :

$$\int_{x-1}^{x} (x+y)dy = x(x-(x-1)) + \frac{1}{2}(x^2 - (x-1)^2) = 2x - \frac{1}{2}.$$

Puis on intègre en x entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 2x - \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.$$