Examen de Math 255

Durée 2 heures. Documents et calculatrices interdits

Le 6 Janvier 2011.

barême indicatif: 3, 3, 4, 5, 5

Questions de cours

1) Enoncer le théorème sur le changement de variables pour les intégrales doubles.

2) Ecrire la formule pour la longueur d'un arc $\gamma \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Donner le degré de la forme α et calculer dα pour :

$$\begin{aligned} &1) \quad \alpha = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dx_1 - (x_1x_2 + x_2x_3)dx_3 \\ &2) \quad \alpha = 2x_1x_3^2 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \sin(x_1x_2) \, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère le domaine

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x_1^3 \leq x_2 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^2.$$

1) Tracer le domaine D et calculer son aire.

2) Calculer

$$\iint_D x_1x_2 \, dx_1 \, dx_2.$$

3) Soit γ le bord de D orienté positivement. Calculer la circulation du champs de vecteurs $\vec{W}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2)$ le long de γ. *Indication : On peut penser à la formule de Green-Riemann.*

Exercice 3. On considère le corps

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2 | \, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3 \leq 1\} \subset \mathbf{R}^3.$$

1) Décrire D en utilisant les coordonnées cylindriques.

2) Calculer

$$\iiint_D \alpha$$

Pour $\alpha = x_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

3) Soit S le bord de D orienté par le vecteur normal pointant vers l'extérieur de D. Calculer

$$\iint_S x_2x_3dx_1 \wedge dx_3 + x_3dx_2 \wedge dx_3.$$

Indication : Penser à la formule d'Ostrogradski.

Exercice 4. Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la surface paramétrée définie par :

$$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \ni (t, s) \mapsto x(t, s) = ((5 + \cos t) \cos s, (5 + \cos t) \sin s, \sin t).$$

1) Calculer les vecteurs $\frac{\partial x}{\partial t}(t, s)$ et $\frac{\partial x}{\partial s}(t, s)$ et en déduire l'expression de l'élément d'aire d^2S.

2) Calculer l'aire de la surface S.