Controle de Mathématiques (S3PC) n° 2

Durée 1 heure 30. Documents et calculatrices interdits

.

Exercice 1. Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine défini par :

$$D = \{(x_1, x_2) \mid (x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \leq x_2^2\}.$$

1) Pour $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ on note par $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ les coordonnées polaires de (x_1, x_2). On rappelle que $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ et $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

Montrer que D est donné en coordonnées polaires par :

$$D = \{(x_1, x_2) \mid r \leq \sin^2\theta\}$$

2) Calculer l'aire du domaine D.

Indication : on pourra utiliser la formule suivante :

$$\sin^4\theta = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta).$$

Exercice 2. Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine défini par :

$$D = \{(x_1, x_2) |\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

1) Dessiner le domaine D.

2) Soit γ l'arc orienté égal au bord de D parcouru dans le sens trigonométrique. Donner une paramétrisation de γ.

Indication : on pourra écrire γ comme une union de trois arcs simples γ_1, γ_2, γ_3 dont on donnera pour chacun une paramétrisation.

3) Calculer l'intégrale :

$$\int\int_D (x_1 + x_2)\mathrm{e}^{-x_1}\mathrm{e}^{-x_2}\,dx_1 dx_2.$$