Controle de Mathématiques (S3PC) n° 1

Durée 1 heure . Documents et calculatrices interdits

19 Octobre 2009

Exercice 1. Le polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = (-7-\lambda)(8-\lambda) + 54 = \lambda^2 - \lambda - 2,$$

les deux racines sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

On cherche par la méthode habituelle un vecteur propre pour -1 et pour 2, on obtient que $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre -1 et que $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 2.

2) La solution générale du système est donnée par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathrm{e}^{-t} e_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t} e_2,$$

où α_1, α_2 sont deux constantes réelles arbitraires. On obtient donc :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3\alpha_1 \mathrm{e}^{-t} + 2\alpha_2 \mathrm{e}^{2t}, \\ x_2(t) &= \alpha_1 \mathrm{e}^{-t} + \alpha_2 \mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$

3) On réécrit l'équation sous la forme condensée :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \mathrm{e}^{-t} u,$$

où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On met l'expression $z(t) = \alpha t \mathrm{e}^{-t} e_1 + \beta \mathrm{e}^{-t} e_2$ dans l'équation et on essaie d'identifier les constantes α, β. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -\alpha t \mathrm{e}^{-t} e_1 - \beta \mathrm{e}^{-t} e_2 + \alpha \mathrm{e}^{-t} e_1, \\ Az(t) &= -\alpha t \mathrm{e}^{-t} e_1 + 2\beta \mathrm{e}^{-t} e_2, \end{aligned}$$

en utilisant que e_1, e_2 sont vecteurs propres de A. On a d'autre part $u = e_1 - e_2$, et on obtient donc la condition :

$$\alpha e_1 - 3\beta e_2 = e_1 - e_2,$$

c'est à dire que $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{3}$. La solution particulière est donc $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ avec

$$z_1(t) = (3t + \frac{2}{3})\mathrm{e}^{-t}, \;\; z_2(t) = (t + \frac{1}{3})\mathrm{e}^{-t}.$$

où e_1, e_2 sont les deux vecteurs propres de A déterminés précédemment.

Exercice 2. Par linéarité par rapport à la première colonne, on a :

$$I = \begin{vmatrix} a+d & b & c \\ a & b+d & c \\ a & b & c+d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+d & c \\ 1 & b & c+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & b & c \\ 0 & b+d & c \\ 0 & b & c+d \end{vmatrix}.$$

En développant le deuxième déterminant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$I = a \begin{vmatrix} 1+d & b & c \\ 1 & b+d & c \\ 1 & b & c+d \end{vmatrix} + d^2(b+c+d).$$

Par linéarité par rapport à la dernière colonne, on a :

$$a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+d & c \\ 1 & b & c+d \end{vmatrix} = ac \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b+d & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & b+d & 0 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 + ad^2.$$

On a donc finalement :

$$I = d^2(a+b+c+d).$$