Controle de Mathématiques (S3PC) n° 2

Durée 1 heure . Documents et calculatrices interdits

7 Décembre 2009

Exercice 1.

Le domaine D s'écrit sous la forme :

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1\},$$

on intègre d'abord en y puis en x. On obtient :

$$\begin{aligned} I = & \textstyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2} \mathrm{d}y \\ = & \textstyle\int_0^1 \mathrm{d}x x \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2)\right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 \\ = & \textstyle\int_0^1 \frac{x}{2}\log(2+x^2) - \frac{x \log 2}{2} \mathrm{d}x \\ = & \textstyle\int_0^1 \frac{x}{2}\log(2+x^2)\mathrm{d}x - \frac{\log 2}{4}. \end{aligned}$$

Pour calculer la première intégra le on fait le changement de variable $s = 2 + x^2$, $\mathrm{d}s = 2x\mathrm{d}x$,on obtient :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 \frac{x}{2}\log(2+x^2)\mathrm{d}x = & \textstyle\int_2^3 \frac{1}{4}\log s\ ds \\ = & \textstyle\frac{1}{4}\left[s \log s - s\right]_2^3 = \frac{1}{4}(3\log 3 - 2\log 2). \end{aligned}$$

Finalement :

$$I = \frac{1}{4}(3\log 3 - 2\log 2 - \log 2) = \frac{3}{4}(\log 3 - \log 2).$$

Exercice 2. 1) On calcule

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t, s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 2t \end{pmatrix},\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial s}(t, s) = \begin{pmatrix} -t \sin s \\ t \cos s \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial s}(t, s) = \begin{pmatrix} -2t^2 \cos s \\ -2t^2 \sin s \\ t \end{pmatrix}.$$

Comme $t \geq 0$ pour $(t, s) \in D$, le vecteur $\frac{\partial x}{\partial t} \wedge \frac{\partial x}{\partial s}(t, s)$ pointe dans la bonne direction, l'orientation est donc correcte.

2) En appliquant les formules vues en cours, on obtient :

$$I = \int\int_D \vec{F}(x(t, s)) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial s}(t, s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

La fonction sous l'intégrale vaut :

$$-2t^4 \cos^3 s - 2t^4 \cos s \sin^2 s + t = -2t^4 \cos s + t,$$

et donc :

$$I = \int_0^{2\pi} \cos s\ \mathrm{d}s \times \int_0^1 -2t^4\ \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\ \mathrm{d}s \times \int_0^1 t\ \mathrm{d}t = \pi.$$

"