Examen de Mathématiques (S3 PMCP) n° 1

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 5 Janvier 2010.

Exercice 1. On peut paramétrer γ par la coordonnée x, c'est à dire par :

$$[-1,2] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) = (t, t^2).$$

On applique les règles vues en cours : $\mathrm{d}x$ devient $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y$ devient $2t\mathrm{d}t$, et donc :

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\frown}{\gamma}} \alpha &= \int_{-1}^{2} t^3 \mathrm{d}t + (t+t^2)2t\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{2} 3t^3 + 2t^2 \mathrm{d}t = \left[\tfrac{3}{4}t^4 + \tfrac{2}{3}t^3\right]_{-1}^{2} = \tfrac{69}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2. On applique les règles vues en cours :

$$\mathrm{d}x_1 \to -\sin t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x_2 \to \cos t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x_3 \to 2\cos t\mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\frown}{\gamma}} \alpha &= \int_{0}^{\pi/2} -4\cos t \sin^4 t + 6\cos^3 t \sin t + 2\cos t \ \mathrm{d}t \\ &= \left[-\tfrac{4}{5}\sin^5 t - \tfrac{3}{2}\cos^4 t + 2\sin t\right]_{0}^{\pi/2} = \tfrac{27}{10}. \end{aligned}$$

Exercice 3. On calcule $\mathrm{d}\alpha$ pour $\alpha = \sin(x+y)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y$. On trouve :

$$\mathrm{d}\alpha = (-\cos(x+y) + y\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Par la formule de Green-Riemann, si $D = [1,2] \times [1,2]$ est le carré tel que $\gamma = \partial D$, on a :

$$\int_{\overset{\frown}{\gamma}} \alpha = \int_D \mathrm{d}\alpha.$$

La deuxième intégrale vaut :

$$I = \iint_D (-\cos(x+y) + y\mathrm{e}^{xy})\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On intègre d'abord en x puis en y :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \mathrm{d}y \int_1^2 (-\cos(x+y) + y\mathrm{e}^{xy})\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left[-\sin(x+y) + \mathrm{e}^{xy}\right]_{x=1}^{x=2} \mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 -\sin(y+2) + \sin(y+1) - \mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{2y} \mathrm{d}y \\ &= \left[\cos(y+2) - \cos y + 1 - \mathrm{e}^{y} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_{y=1}^{y=2} \\ &= -2\cos(3) + \cos(2) + \mathrm{e} - \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \cos(4) + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^4. \end{aligned}$$

Exercice 4.

On doit d'abord trouver un paramétrage de la surface S. On peut prendre par exemple le paramétrage donné par les coordonnées cylindriques :

$$[0,1] \times [0, 2\pi] \ni (r, \theta) \mapsto x(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r^2).$$

Pour calculer l'élément d'aire d^2S on calcule :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2r \end{pmatrix},\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r,\theta) \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\theta \\ 2r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix}, \ \|\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r,\theta) \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}(r,\theta)\| = (4r^4+r^2)^{\frac{1}{2}} = r(4r^2+1)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(S) = &\ \textstyle\iint_S \mathrm{d}^2 S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r(4r^2+1)^{\frac{1}{2}} \\ = &\ 2\pi\left[\tfrac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=1} = \pi\tfrac{5^{3/2}-1}{6}. \end{aligned}$$

2) On calcule d'abord $\mathrm{d}\alpha$ qui vaut 0. On remarque que la réunion des deux surfaces S et S' est égale au bord du domaine :

$$U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2 - x_2^2,\ 0 \le x_1^2 + x_2^2 \le 1\}.$$

Si on oriente le disque S' de telle sorte que la normale pointe vers le haut, et si on oriente le bord ∂U de U de manière canonique, on a :

$$\int_{\partial U} \alpha = \int_S \alpha - \int_{S'} \alpha.$$

Par la formule de Green-Riemann on a :

$$\int_{\partial U} \alpha = \int_U \mathrm{d}\alpha = \int_U 0 = 0,$$

ce qui montre l'égalité demandée. Pour calculer l'intégrale il suffit donc de calculer :

$$\int_{S'} \alpha.$$

Un paramétrage de S' est simplement :

$$D \ni (t,s) \mapsto x(t,s) = (t,s,0),$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le disque unité $D = \{(t,s) \|\ t^2 + s^2 \le 1\}$. On applique les règles :

$$\mathrm{d}x_1 \to \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x_2 \to \mathrm{d}s, \mathrm{d}x_3 \to 0.$$

On a donc :

$$\textstyle\int_{S'} \alpha = \iint_D (t-s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

Par argument de parité les intégrales $\iint_D t\mathrm{d}t\mathrm{d}s$ et $\iint_D s\mathrm{d}t\mathrm{d}s$ sont nulles toutes les deux. On a donc :

$$\int_S \alpha = \int_{S'} \alpha = 0.$$

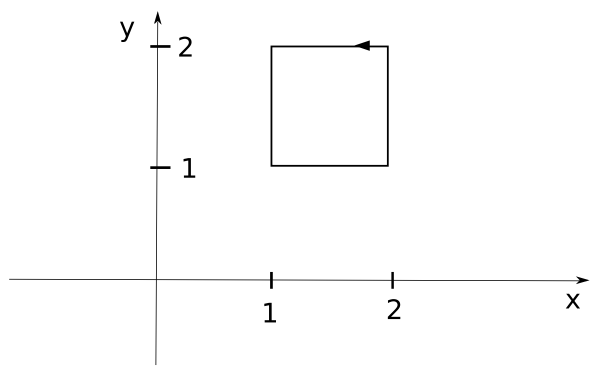

FIGURE 1 – Le carré γ.

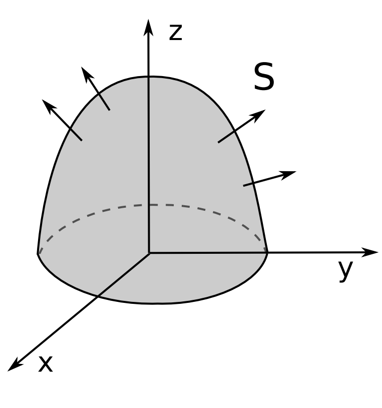

FIGURE 2 – La surface S.