Examen de Math. 255 du jeudi 6 janvier 2011

corrigé

Exercice 1.

1) α est de degré 1, $d\alpha =$

$$(2x_2\,dx_2 + 2x_3\,dx_3)\wedge dx_1 - (x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2 + x_3\,dx_2)\wedge dx_3$$

$$= -2x_2\,dx_1\wedge dx_2 - (x_3 + x_1)\,dx_2\wedge dx_3 + (2x_3 + x_2)\,dx_3\wedge dx_1.$$

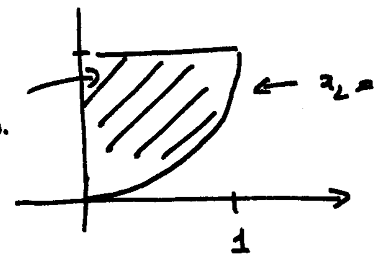
2) α est de degré 2, $d\alpha =$

$$4x_1x_3\,dx_3\wedge dx_1\wedge dx_2 + x_2\cos(x_1x_2)\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

$$= \left(x_2\cos(x_1x_2) + 4x_1x_3\right) dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3.$$

Exercice 2.

1)



L'aire de D est égale à : $\text{Aire}(D) = \iint_D dx_1\,dx_2$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_{x_1^3}^1 dx_2 = \int_0^1 (1 - x_1^3)\,dx_1 = \left[x_1 - \frac{1}{4}x_1^4\right]_0^1 = 3/4.$$

2) De même, on a :

$$\iint_D x_1x_2\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1 x_1\,dx_1 \int_{x_1^3}^1 x_2\,dx_2 = \int_0^1 x_1 \left[\frac{1}{2}x_2^2\right]_{x_1^3}^1 dx_1$$

$$= \int_0^1 x_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^6\right) dx_1 = \left[\frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{16}x_1^8\right]_0^1 = \frac{3}{16}.$$

3). On a par la formule de Green-Riemann :

$$\mathrm{Circ}(\gamma, \vec{W}) = \iint_D \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \, dx_1 dx_2 .$$

On calcule : $\frac{\partial W_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial W_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -1$. Donc :

$$\mathrm{Cir}(\gamma, \vec{W}) = -\iint_D dx_1 dx_2 = -3/4 .$$

Exercice 3.

1) On rappelle les coordonnées cylindriques :

$x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $x_3 = z$. Le domaine D s'écrit en coordonnées cylindriques comme

$$D_{cyl} = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r^2 \leq 1,\ r \leq z \leq 1,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$$

(on utilise que $r^2 = x_1^2 + x_2^2$), soit

$$D_{cyl} = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq z \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$ car la condition

$0 \leq r^2 \leq 1$ est équivalente à $0 \leq r \leq 1$.

2) Par les définitions du cours, on a :

$$I = \iiint_D \alpha = \iiint_D x_3 \, dx_1 dx_2 dx_3 .$$ Par passage en coordonnées cylindriques :

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{D_1} z r \, dr dz \quad \text{où} \quad D_1 = \{(r,z) \mid 0 \leq r \leq z \leq 1\}.$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr\, r \int_r^1 z dz = \pi \int_0^1 r\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$2\pi \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{8}\right]_0^1 = \pi/2 .$$

3) On pose $\alpha = x_2 x_3 \, dx_1 \wedge dx_3 + x_3 \, dx_2 \wedge dx_3$. On calcule

$d\alpha$. On a : $d\alpha = (x_3 \, dx_2 + x_2 \, dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3$

$$+ \, dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = x_3 \, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = - x_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 .$$

Par la formule de Green-Riemann:

$$\iint_S \alpha = \iiint_D d\alpha = - \iiint_D x_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = -\pi/2 .$$

Exercice 4.

1) On a: $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t,s) = \begin{pmatrix} -\sin t \cos s \\ -\sin t \sin s \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \vec{x}}{\partial s}(t,s) = \begin{pmatrix} -(5+\cos t)\sin s \\ (5+\cos t)\cos s \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t,s) \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial s}(t,s) = \begin{pmatrix} -(5+\cos t)\cos s \cos t \\ -(5+\cos t)\sin s \cos t \\ -(5+\cos t)\left(\sin t \cos^2 s + \sin t \sin^2 s\right) \end{pmatrix}$

$$= -(5+\cos t) \begin{pmatrix} \cos s \cos t \\ \sin s \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = -(5+\cos t)\, \vec{v}(t,s)$$

L'élément d'aire d^2S est égal à $\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \right\| dt\, ds$

Comme $5+\cos t \geq 0 \ \forall t$, on a:

$\|(5+\cos t)\, \vec{v}(t,s)\| = (5+\cos t)\, \|\vec{v}(t,s)\|$ et

$\|\vec{v}(t,s)\|^2 = \cos^2 s \cos^2 t + \sin^2 s \cos^2 t + \sin^2 t = (\cos^2 s + \sin^2 s)\cos^2 t + \sin^2 t$

$= 1$. On a donc:

$$d^2S = (5+\cos t)\, dt\, ds.$$

2) L'aire de la surface est:

$$\text{Aire}(S) = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} ds\, (5+\cos t) = 2\pi \int_0^{2\pi} (5+\cos t)\, dt =$$

$$2\pi \times 10\pi = 20\pi^2 .$$