Corrigé de l'examen de rattrapage S3 PC Calcul différentiel pour la physique du 17 juin 2009.

Exercice 1.

1) on calcule $\det(A-\lambda \mathbb{1}_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = P(\lambda)$

En développant par rapport à la dernière colonne, on a :

$$P(\lambda) = 2\begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3-2\lambda) - \lambda(3+4\lambda+\lambda^2) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6.$$

On note que $P(-2)=0$. On cherche à factoriser $\lambda+2$.

On écrit :

$$(\lambda^3+4\lambda^2+7\lambda+6) = (\lambda+2)(\lambda^2+a\lambda+b)$$

ce qui donne : $2b=6$, $2a+b=7$ $2+a=4$, donc $b=3$, $a=2$.

et $\lambda^3+4\lambda^2+7\lambda+6 = (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+3)$.

On cherche les racines de $\lambda^2+2\lambda+3$: $\Delta = 4-12 = -8$,

les racines sont : $\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$.

les valeurs propres de T sont -2, $-1+i\sqrt{2}$, $-1-i\sqrt{2}$.

2) les valeurs propres sont simples, T admet donc une base de vecteurs propres.

On cherche un vecteur propre pour -2 :

on résout : $\begin{cases} -x+2z=0 \\ x+y=0 \\ -2x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$, On prend comme vecteur propre $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur propre pour $-1+i\sqrt{2}$. On résout :

$$\begin{cases} -(2+i\sqrt{2})x + 2z = 0 \\ x - i\sqrt{2}\,y = 0 \\ -2x - y + (1-i\sqrt{2})z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -(2+i\sqrt{2})x + 2z = 0 \\ x - i\sqrt{2}\,y = 0 \end{cases},$$

on prend comme vecteur propre $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1+i\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Comme A est une matrice réelle, $\vec{e}_3 = \overline{\vec{e}_2}$ est un vecteur propre pour $-1-i\sqrt{2} = \overline{-1+i\sqrt{2}}$. Donc $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \\ -1-i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ convient.

3) La solution générale de (E) est en posant $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$:

$$\vec{u}(t) = \lambda_1 e^{-2t}\vec{e}_1 + \lambda_2 e^{(-1+i\sqrt{2})t}\vec{e}_2 + \lambda_3 e^{(-1-i\sqrt{2})t}\vec{e}_3.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois constantes dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

1) $f(x,y)$ est défini si et seulement si $x+\sqrt{x^2+y^2}>0$.

Donc $D=\{(x,y)\mid x+\sqrt{x^2+y^2}>0\}$.

Pour déterminer D on regarde ses trois parties

$D\cap\{(x,y)\mid x>0\}$, $D\cap\{(x,y)\mid x=0\}$, $D\cap\{(x,y)\mid x<0\}$.

Evidement : $\{(x,y)\mid x>0\}\subset D$.

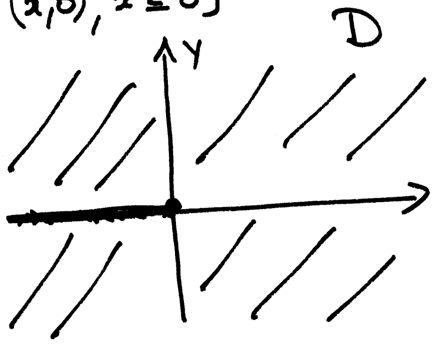
– . $D\cap\{(x,y)\mid x=0\}=\{(0,y)\mid y\neq 0\}$.

– . si $x+\sqrt{x^2+y^2}>0$ et $x<0$ on a $\sqrt{x^2+y^2}>-x \Leftrightarrow x^2+y^2>x^2 \Leftrightarrow y\neq 0$

Donc $D=\{(x,y)\mid x>0\}\cup\{(x,y)\mid x\leq 0,\ y\neq 0\}$

$=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\leq 0\}$

Dessin :



2) On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1+\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{x+(x^2+y^2)^{1/2}}=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{x+(x^2+y^2)^{1/2}}=\frac{y}{x(x^2+y^2)^{1/2}+x^2+y^2}.$$

④

Exercice 3.

soit $a \in \mathbb{R}$ et $C_a = \{(x,y) \mid f(x,y) = a\}$

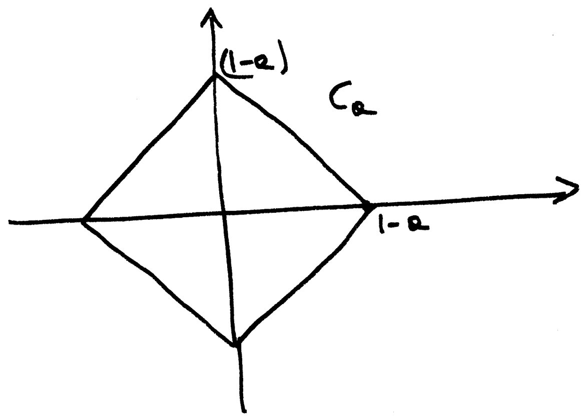
$= \{(x,y) \mid |x|+|y| = 1-a\}$, la ligne de niveau a.

Comme $|x|+|y| \geq 0 \ \forall (x,y)$ on a : $C_a = \phi$ si $a > 1$.

si $a = 1$ $\quad C_a = \{(0,0)\}$

si $a < 1$ on pose $1-a = d > 0$. On regarde l'intersection de $\{(x,y) \mid |x|+|y| = d\}$ avec les quatre quadrans du plan.

On obtient le dessin suivant :



Exercice 4.

1) On a : $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^{x^2-y}\left(2x(3-2x+y)-2\right), = e^{x^2-y}(-4x^2+2xy+6x-2)$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = e^{x^2-y}\left(-(3-2x+y)+1\right) . = e^{x^2-y}(2x-y-2)$

(x,y) est un point critique de u si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x(3-2x+y) = 2 \\ (3-2x+y) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(3-2x+y) = 1 \\ (3-2x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

$(1,0)$ est le seul point critique de u.

On calcule

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{x^2-y}\left(2x\,(-4x^2+2xy+6x-2) - 8x+2y+6\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{x^2-y}\left(-(-4x^2+2xy+6x-2) + 2x\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x^2-y}\left(-(2x-y-2) - 1\right).$$

Au point $(1,0)$ la matrice des dérivées partielles secondes est :

$$H = e \times \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$ dont le déterminant vaut :

$$e^4(2-2) = -2e^4 < 0.$$

La matrice H a donc deux valeurs propres de signe contraire, le point critique $(1,0)$ est un point selle.

Exercice 5.

1) en utilisant les coordonnées polaires, on voit que

$$[0,1]\times[0,2\pi] \ni (r,\theta) \longmapsto x(r,\theta) = \left(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ \frac{r^2}{2}\sin 2\theta\right)$$

est une paramétrisation de S.

2) On calcule $\frac{\partial x}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ r\sin 2\theta \end{pmatrix}$ $\frac{\partial x}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ r^2\cos 2\theta \end{pmatrix}$

et $\frac{\partial x}{\partial r} \wedge \frac{\partial x}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r^2(\sin\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta\cos\theta) \\ -r^2(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) \\ r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -r^2\sin\theta \\ -r^2\cos\theta \\ r \end{pmatrix}$$

et $\left\| \frac{\partial x}{\partial r} \wedge \frac{\partial x}{\partial \theta} \right\|^2 = r^4\cos^2\theta + r^4\sin^2\theta + r^2 = r^4 + r^2$

$$\vec{v}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{r}{(r^2+1)^{1/2}}\sin\theta \\ -\frac{r}{(r^2+1)^{1/2}}\cos\theta \\ \frac{1}{(r^2+1)^{1/2}} \end{pmatrix}.$$

3) On a: $A(S) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left\| \frac{\partial x}{\partial r} \wedge \frac{\partial x}{\partial \theta} \right\| dr\, d\theta = 2\pi \times \int_0^1 r(r^2+1)^{1/2} dr$

$= 2\pi \times \left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} \times (2^{3/2}-1) = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$

Exercice 6

1) On calcule $d\omega = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\, dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy \wedge dx =$

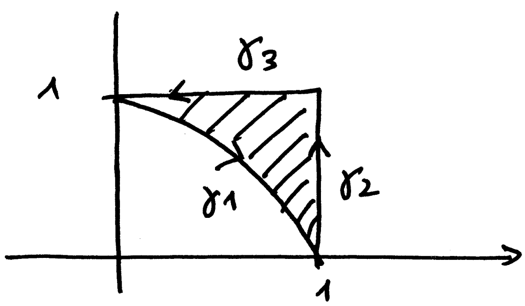
$-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dx \wedge dy$. On obtient l'équation:

$-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$ dont une solution est:

$P(x,y) = \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{(1+x^2+y^2)} + g(x)$ g 1 fonction arbitraire de la variable x.

On va prendre $g(x) \equiv 0$.

2) On dessine K:



On oriente ∂K de manière naturelle (voir dessin).

(∂K est l'union des 3 arcs $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$).

Par la formule de Green-Riemann, comme $\alpha = d\omega$.

$$\iint_K \alpha = \int_{\partial K} \omega.$$

-. On paramètre γ_1 par :

$$[0, \pi/2] \ni t \longmapsto (\sin t, \cos t) \in \gamma_1.$$

$\omega = \frac{x}{2} \times \frac{1}{(1+x^2+y^2)} dx$ devient :

$$\frac{\sin t}{2} \times \frac{1}{2} \times \cos t \, dt \quad , \text{ et :}$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin t \cos t \, dt = \left[\frac{1}{8} \sin^2 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}.$$

-. On paramètre γ_2 :

$$[0, 1] \ni t \longmapsto (1, t) \in \gamma_2.$$

sur γ_2 : $dx = 0$ et $\int_{\gamma_2} \omega = 0$.

-. On paramètre γ_3 :

$[0, 1] \ni t \longmapsto (1-t, 1)$ sur γ_2 $dx = -dt$

$\underline{\omega \text{ devient}}$:

$\frac{(1-t)}{2} \times \frac{1}{2+(1-t)^2}$ on doit calculer :

$$\int_0^1 \frac{1-t}{2} \times \frac{1}{2+(1-t)^2}\, dt$$ on pose $1-t = s$

$$= \int_0^1 \frac{s}{2} \times \frac{1}{2+s^2}\, ds = \left[\frac{1}{4}\ln(2+s^2)\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

<u>On a donc :</u>

$$\iint_K \alpha = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$