

---

## Devoir n° 1 S3PC 1<sup>er</sup> semestre 2007-2008

---

A rendre la semaine du 15 Octobre 2007.

**Exercice 1.** Soit  $a \in \mathbf{R}$  un paramètre réel. On considère les points du plan  $A = (1 + a, a)$ ,  $B = (0, 1 + a)$  et  $C = (a, 1 - a)$ .

- 1) A quelle condition les points  $A, B, C$  sont ils alignés?
- 2) Quelle est l'aire du parallélogramme dont deux côtés sont  $AB$  et  $AC$ ?
- 3) Quelle est l'aire du triangle  $ABC$ ?
- 4) Soit  $T$  l'application linéaire de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}^2$  de matrice  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ .

Soient  $A' = T(A)$ ,  $B' = T(B)$ ,  $C' = T(C)$ . Répondre aux questions 1), 2), 3) ci dessus en remplaçant  $A, B, C$  par  $A', B', C'$ .

**Exercice 2.** Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En déduire le volume du parallélépipède de  $\mathbf{R}^3$  construit sur les vecteurs  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, 3, 4)$  et  $\vec{w} = (3, 6, 10)$ .

**Exercice 3.**

- 1) On considère les déterminants de Van der Monde:

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \quad D(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Calculer  $D(a, b)$ .

- 2) Montrer que sans changer la valeur de  $D(a, b, c)$  on peut remplacer sa dernière ligne par  $(f(a), f(b), f(c))$  où  $f$  est un polynôme de la forme  $f(x) = x^2 + \alpha x \beta$ .
- 3) Vérifier que si  $f(x) = (x - b)(x - c)$ , alors  $f(b) = f(c) = 0$ . En déduire la valeur de  $D(a, b, c)$ .

**Exercice 4.**

- 1) Donner la solution générale du système d'équations différentielles:

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t). \end{cases}$$

- 2) On considère maintenant le système d'équations différentielles:

$$(E) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + e^{2t}, \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t). \end{cases}$$

Déterminer les réels  $a_1$  et  $a_2$  tels que les fonctions

$$f_1(t) = a_1 e^{2t}, \quad f_2(t) = a_2 e^{2t},$$

soient une solution de ce système.

- 3) Montrer que si  $(x_1(t), x_2(t))$  est une solution arbitraire de  $(E)$ , alors  $(x_1(t) - f_1(t), x_2(t) - f_2(t))$  est une solution de  $(S)$ . En déduire la solution générale de  $(E)$ .