Devoir n° 1 S3PC 1er semestre 2008-2009

A rendre la semaine du 6 Octobre 2008.

Exercice 1. Soit $b \in \mathbf{R}$ un paramètre réel. On considère les points du plan $A = (b, 1+b)$, $B = (1+b, 0)$ et $C = (1-b, b)$.

1) A quelle condition les points A, B, C sont ils alignés?

2) Quelle est l'aire du parallélograme dont deux côtés sont AB et AC?

3) Quelle est l'aire du triangle ABC?

4) Soit T l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Soient $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$. Répondre aux questions 1), 2), 3) ci dessus en remplaçant A, B, C par A', B', C'.

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En déduire le volume du parallélépipède de $\mathbf{R}^3$ construit sur les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 2, 4)$ et $\vec{w} = (4, 6, 5)$.

Exercice 3.

1) On considère les déterminants de Van der Monde:

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \quad D(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Calculer $D(a, b)$.

2) Montrer que sans changer la valeur de $D(a, b, c)$ on peut remplacer sa dernière ligne par $(f(a), f(b), f(c))$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

3) Vérifier que si $f(x) = (x-b)(x-c)$, alors $f(b) = f(c) = 0$. En déduire la valeur de $D(a, b, c)$.

Exercice 4.

1) Donner la solution générale du système d'équations différentielles:

$$(S) \begin{cases} x_1' t() = 2x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t). \end{cases}$$

2) On considère maintenant le système d'équations différentielles:

$$(E) \begin{cases} x_1' t() = 2x_1(t) + x_2(t) + \mathrm{e}^{2t}, \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t). \end{cases}$$

Déterminer les réels a_1 et a_2 tels que les fonctions

$$f_1(t) = a_1 \mathrm{e}^{2t}, \quad f_2(t) = a_2 \mathrm{e}^{2t},$$

soient une solution de ce système.

3) Montrer que si $(x_1(t), x_2(t))$ est une solution arbitraire de (E), alors $(x_1(t) - f_1(t), x_2(t) - f_2(t))$ est une solution de (S). En déduire la solution générale de (E).