Devoir n° 1 S3PC 1^{er} semestre 2008-2009

A rendre la semaine du 19 Octobre 2009.

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En déduire le volume du parallélépipède de $\mathbb{R}^3$ construit sur les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 2, 4)$ et $\vec{w} = (4, 6, 5)$.

Exercice 2. Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(a) = \begin{bmatrix} 2a & -a & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 3 & 2a & a^2 \end{bmatrix}$$

est inversible.

Exercice 3.

1) On considère les déterminants de Van der Monde:

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \quad D(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Calculer $D(a,b)$.

2) Montrer que sans changer la valeur de $D(a,b,c)$ on peut remplacer sa dernière ligne par $(f(a), f(b), f(c))$ où f est un polynôme de la forme $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

3) Vérifier que si $f(x) = (x-b)(x-c)$, alors $f(b) = f(c) = 0$. En déduire la valeur de $D(a,b,c)$.

Exercice 4. On considère les systèmes différentiels:

$$(S_0) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + \mathrm{e}^{2t} \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

1) Déterminer la solution générale de (S_0).

2) Déterminer une solution particulière $(y_1(t), y_2(t))$ de (S).

Indication: chercher cette solution sous la forme $(a_1\mathrm{e}^{2t}, a_2\mathrm{e}^{2t})$ *pour des constantes* a_1, a_2 *à déterminer.*

3) Montrer que si $(x_1(t), x_2(t))$ est une solution arbitraire de (S), alors $(z_1(t), z_2(t)) = (x_1(t) - y_1(t), x_2(t) - y_2(t))$ est une solution de (S_0).

En déduire la solution générale de (S).

4) En utilisant le résultat de 2), déterminer la solution $(x_1(t), x_2(t))$ de (S) avec les conditions initiales:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

5) Calculer les limites de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en $\pm\infty$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Déterminer ses points critiques et donner leur nature (maximum, minimum, ou point selle).