Devoir n° 2 S3PC 1$^{\text{er}}$ semestre 2007-2008

A rendre la semaine du 19 Novembre 2007.

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. Exprimer à l'aide de la fonction f' les dérivées partielles $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ de la fonction :

$$\phi(x_1, x_2) = f\left(\frac{2x_1 + 3x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}\right).$$

Exercice 2. 1) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2.$$

Déterminer les points critiques de f.

2) Déterminer lesquels de ces points critiques sont des maxima ou des minimas locaux.

Exercice 3. 1) Montrer que si $t \in [-\pi, \pi]$ vérifie l'équation :

$$t = \frac{\pi}{2} \sin t,$$

alors nécessairement $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2) Etudier la fonction $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto t - \frac{\pi}{2} \sin t$ et en déduire que les seules solutions de l'équation

$$t = \frac{\pi}{2} \sin t$$

dans $[-\pi, \pi]$ sont 0, $\pi/2$ et $-\pi/2$.

3) On admettra que les seules solutions de l'équation :

$$t = \frac{\pi}{2} \sin^2 t,$$

sont 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, et que les seules solutions de l'équation :

$$t = -\frac{\pi}{2} \sin^2 t,$$

sont 0, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. 1) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \pi \cos x_1 \cos x_2.$$

Montrer que si (x_1, x_2) est un point critique de f alors nécessairement :

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \sin x_1 \cos x_2, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \cos x_1 \sin x_2.$$

2) En déduire que si (x_1, x_2) est un point critique de f alors nécessairement on a

$$|x_1| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |x_2| \leq \frac{\pi}{2}.$$

3) Vérifier que si (x_1, x_2) est un point critique de f, alors $t = x_1 + x_2$ vérifie

$$t = \frac{\pi}{2} \sin t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

4) Déduire alors de l'exercice 3 que si (x_1, x_2) est un point critique de f, on a de plus

$$x_1 + x_2 \in \{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\}.$$

5) Montrer en utilisant à nouveau l'exercice 3 que si (x_1, x_2) est un point critique de f on a :
A) si $x_1 + x_2 = 0$ alors $t = 2x_1$ est solution de l' équation $t = \frac{\pi}{2} \sin t$ et en déduire que

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \text{ ou } (\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}), \text{ ou } (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4});$$

B) si $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$, alors x_1 est solution de l'équation $x_1 = \frac{\pi}{2} \sin^2 x_1$ et en déduire que

$$(x_1, x_2) = (0, \frac{\pi}{2}) \text{ ou } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \text{ ou } (\frac{\pi}{2}, 0);$$

C) si $x_1 + x_2 = -\frac{\pi}{2}$, alors x_1 est solution de l'équation $x_1 = -2 \sin^2 x_1$ et en déduire que

$$(x_1, x_2) = (0, -\frac{\pi}{2}) \text{ ou } (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) \text{ ou } (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

Exercice 5. 1) Soit $D_1 = [0, 1] \times [0, 1]$. Calculer à l'intégrale :

$$\int\int_{D_1} \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Indication : intégrer d'abord en y et utiliser le fait que la primitive de $\ln(a+t)$ *est* $(a+t)\ln(a+t) - t$.

2) Soit D_2 le domaine

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calculer l'intégrale :

$$\int\int_{D_2} \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Indication : passer en coordonnées polaires.

3) Soit D le domaine :

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale :

$$\int\int_{D} \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Exercice 6. 1) Soit C le cercle de rayon 1 de centre $(0, 1)$. Vérifier que l'équation de C en coordonnées polaires est

$$C = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq \pi, r = 2 \sin \theta\}.$$

2) Soit D le disque de rayon 1 de centre $(0, 1)$. Calculer l'intégrale :

$$\int\int_{D} x^2 + y^2 dxdy.$$