Devoir n° 2 S3PC 1er semestre 2008-2009

A rendre la semaine du 24 Novembre 2008.

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. Exprimer à l'aide de la fonction f' les dérivées partielles $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ de la fonction :

$$\phi(x_1, x_2) = f\left(\frac{2x_1 + x_2}{1 + x_1^2 + 2x_2^2}\right).$$

Exercice 2. 1) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2.$$

Déterminer les points critiques de f.

2) Déterminer lesquels de ces points critiques sont des maxima ou des minimas locaux.

Exercice 3. Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$.

une matrice réelle avec $a_{12} = a_{21}$. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$f : \ M = (x_1, x_2) \mapsto f(M) = (x_1^2 + x_2^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2)}.$$

1) Montrer qu'il existe un repère orthonormé du plan et deux constantes réelles λ_1, λ_2 tels que si le point M a les coordonnées (y_1, y_2) dans ce nouveau repère, alors

$$f(M) = (y_1^2 + y_2^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2)}.$$

Indication : on pourra considérer la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

et utiliser le fait qu'une matrice symétrique réelle possède une base orthonormée de vecteurs propres.

2) Discuter les signes de λ_1, λ_2 en fonction du signe de $ac - b^2$.

3) Déterminer les points critiques de la fonction f.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction de deux variables réelles définie par :

$$f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

1) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y)$ et déterminer les points critiques de f.

2) Calculer la matrice des dérivées secondes :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} (x, y)$$

et déterminer la nature des points critiques trouvés en 1).

Exercice 5. 1) Soit $D_1 = [0,1] \times [0,1]$. Calculer à l'intégrale :

$$\int\int_{D_1} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy.$$

2) Soit D_2 le domaine

$$D_2 = \{(x,y) | 0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Calculer l'intégrale :

$$\int\int_{D_2} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy.$$

Indication : passer en coordonnées polaires.

3) Soit D le domaine :

$$D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad x^2+y^2 \geq 1\}.$$

En utilisant ce qui précède, calculer l'intégrale :

$$\int\int_{D} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy.$$