Devoir n° 2 S3PC 1$^{\text{er}}$ semestre 2009-2010

A rendre la semaine du 16 Novembre 2009.

Exercice 1.

On place sur le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ le point $M = (1, 0)$ et deux points A et B définis en fonction des angles α_1, α_2 comme sur la figure 1.

1) Exprimer en fonction de α_1 et α_2 les coordonnées des points A et B.

2) Déterminer la fonction $F(\alpha_1, \alpha_2)$ égale à l'aire du triangle MAB.

Indication : penser à la formule vue en cours donnant l'aire d'un parallélogramme.

3) En étudiant soigneusement les points critiques de la fonction F, déterminer pour quelle valeur de α_1 et α_2 l'aire du triangle MAB est maximale.

Exercice 2. On considère la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - (x^2 + y^2),\ z \geq 0\}.$$

1) Vérifier que S est une surface de révolution autour de l'axe Oz en montrant que si un point M appartient à S, alors l'image de M par une rotation quelconque autour de l'axe Oz appartient aussi à S.

2) Montrer que l'application :

$$[0, 1] \times [0, 2\pi] \ni (t, \theta) \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, 1 - t^2) \in \mathbb{R}^3$$

est une paramétrisation de S.

3) Calculer l'aire de la surface S.

Indication : on pourra utiliser le fait que S est une surface de révolution et appliquer les formules vues en cours.

4) Soit $\vec{F}(x)$ le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On oriente la surface S de telle sorte que en tout point $M \in S$ le vecteur normal unitaire $\vec{\nu}(M)$ pointe vers le haut (c'est à dire que sa troisième composante est toujours positive ou nulle). Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers la surface orientée S.

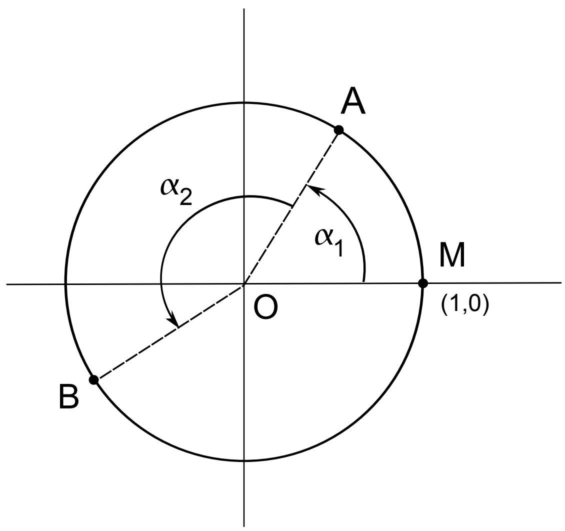

Figure 1 –