Devoir n° 3 S3PC 1$^{\text{er}}$ semestre 2008-2009

A rendre la semaine du 1 Décembre 2008.

Exercice 1. On considère le cône C_1 dans $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2,\ 0 \leq x_3 \leq 1\},$$

et S_1 le solide homogène égal au cône C_1 avec la densité constante $\rho(x) \equiv 1$ sur C_1.

1) Calculer la masse du solide S_1.

2)Soit X_1 le centre de gravité du solide S_1. Montrer que X_1 est sur l'axe Ox_3, puis calculer X_1.

Soit C_2 la demi-boule :

$$C_2 = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\ x_3 \leq 0\},$$

et S_2 le solide homogène égal à la demi-boule C_2 avec la densité constante $\rho(x) \equiv 1$ sur C_2.

3) Calculer la masse M_2 de S_2.
   Indication : on pourra d'abord calculer la masse de la boule entière de rayon 1.

4) Soit X_2 le centre de gravité du solide S_2. Montrer que X_2 est sur l'axe Ox_3 puis calculer X_2.

5) Soit S le solide formé de la réunion de S_1 et S_2. Calculer le centre de gravité X de S.

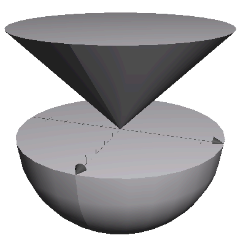

FIGURE 1 – le culbuto S

Tourner la page

Exercice 2. Soit $C_1, C_2 \subset \mathbf{R}^3$ les cylindres de révolution d'axes respectifs Ox_1 et Ox_2, c'est à dire :

$$C_1 = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_2^2 + x_3^2 \leq 1\},$$
$$C_2 = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

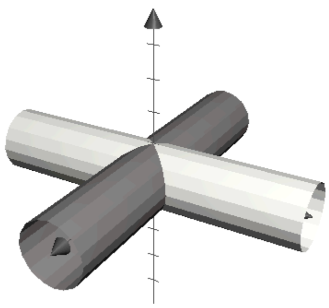

FIGURE 2 – les cylindres C_1 et C_2

1) Soit $C = C_1 \cap C_2$ l'intersection de ces deux cylindres, c'est à dire :

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\ x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

Vérifier que :

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) |\ -1 \leq x_3 \leq 1,\ x_1^2 \leq 1 - x_3^2,\ x_2^2 \leq 1 - x_3^2\}.$$

2) Calculer le volume de C :

$$\mathrm{Vol}(C) = \int\int\int_C dx_1 dx_2 dx_3.$$

Indication : intégrer une variable après l'autre dans un ordre bien choisi.