Devoir n° 3 S3PC 1$^{\text{er}}$ semestre 2008-2009

A rendre la semaine du 1 Décembre 2009.

Exercice 1. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$D : \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \ -1 \leq x_3 \leq 1, \ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2 + 1\}.$$

1) Montrer que D est inclus dans la boule de centre 0 de rayon $\sqrt{3}$.

2) Calculer le volume de D.

Exercice 2. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par :

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \ x_1^2 + x_2^2 \leq x_1, \ x_1^2 + x_2^2 \geq x_2\}.$$

1) Dessiner le domaine D. (Commencer par dessiner les deux courbes d'équations $x_1^2 + x_2^2 = x_1$ et $x_1^2 + x_2^2 = x_2$).

2) Calculer l'intégrale :

$$I = \int\int_D (x_1^2 + x_2^2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale

$$I = \int\int_D x_1^2 x_2^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$$

où

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Exercice 4. 1) Pour les formes différentielles α dans $\mathbb{R}^3$ définies plus bas, donner leur degré et calculer la forme $\mathrm{d}\alpha$:

1) $\alpha = 2x_1^2 \sin(x_2 x_3) \mathrm{d}x_1 + \cos(\mathrm{e}^{x_2}) \mathrm{d}x_3$,

2) $\alpha = (x_2 x_3^2 - x_1) \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \tan(x_1 - 2x_2) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$,

3)$\alpha = \cos(x_1^2 x_3 - 4x_2)$.

Exercice 5. On considère la forme différentielle dans $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha = x_2 \mathrm{d}x_1 + (x_3^2 - x_1) \mathrm{d}x_2 + 2x_1 \mathrm{d}x_3.$$

Soit $\overset{\frown}{\gamma}$ l'arc orienté défini par le paramétrage :

$$[0, \pi] \ni t \mapsto x(t) = (\cos t, \sin t, t) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculer l'intégrale

$$I = \int_{\overset{\frown}{\gamma}} \alpha.$$