Examen de Mathématiques (S3PC) n° 1

Durée 2 heures. Documents et calculatrices interdits

Le 18 Décembre 2007.

barême indicatif: 6, 4, 5, 5.

Rappels de cours

Soit $\vec{W}$:

$$\mathbf{R}^2 \ni x \mapsto \vec{W}(x) = (w_1(x), w_2(x))$$

un champ de vecteurs, $D \subset \mathbf{R}^2$ un domaine borné et γ le bord de D orienté par D. On rappelle la formule de Green-Riemann :

$$\mathrm{Circ}(\vec{W}, \gamma) = \int\int_D \frac{\partial w_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial w_1}{\partial x_2}(x) dx_1 dx_2.$$

Exercice 1. Soit $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine défini par :

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 |\ 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2x_1 - x_1^2\}.$$

1) Tracer le domaine D et calculer son aire.

2) Soit γ l'arc orienté défini par :

$$[0, 2] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbf{R}^2,$$

où

$$x(t) = \begin{cases} (2t, 0), \text{ pour } 0 \leq t \leq 1, \\ (1 - \cos(\pi t), \sin^2(\pi t)), \text{ pour } 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Montrer que l 'arc γ est égal au bord de D orienté par D.

Indication : écrire le bord de D comme la réunion de deux courbes simples qu'on identifiera aux deux parties de l'arc γ.

3) Calculer la circulation le long de γ du champ de vecteurs :

$$\vec{W}(x_1, x_2) = (x_2, 0).$$

Indication : on rappelle que $\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$.

4) Expliquer comment obtenir sans calcul le résultat précédent.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + xy + y^2 + 3}.$$

1) Montrer que

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0, \quad \forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

et en déduire que la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}^2$ tout entier.

2) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Déterminer les points critiques de la fonction f.

Exercice 3.

1) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction :

$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Déterminer ses points critiques et donner leur nature.

2) Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction :

$$g(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4.$$

Déterminer les points critiques de g.

Montrer que $g(t,t) > 0$ pour tout $t \neq 0$ et que $g(t,-t) < 0$ pour tout $t \in]-2,2[$. Que peut on en déduire pour le point critique $(0,0)$ de g ?

Exercice 4. Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ la surface paramétrée définie par :

$$[0,2\pi] \times [0,2\pi] \ni (t,s) \mapsto x(t,s) = ((2+\cos t)\cos s, (2+\cos t)\sin s, \sin t).$$

1) Calculer les vecteurs $\frac{\partial x}{\partial t}(t,s)$ et $\frac{\partial x}{\partial s}(t,s)$ et en déduire l'expression de l'élément d'aire d^2S.

2) Calculer l'aire de la surface S.