Examen de Mathématiques Maths 255

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 5 Janvier 2010.

barême indicatif: 4,5,5,6.

Exercice 1. Soit $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ l'arc de parabole défini par :

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid y = x^2, \ -1 \leq x \leq 2\}.$$

On oriente γ dans le sens des x croissants. Soit α la $1-$forme définie par :

$$\alpha = xy\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y.$$

Calculer l'intégrale :

$$\int_{\widehat{\gamma}} \alpha.$$

Exercice 2. Soit $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ l'arc orienté défini par le paramétrage :

$$[0, \pi/2] \ni t \mapsto x(t) = (\cos t, \sin t, 2\sin t) \in \mathbb{R}^3,$$

et α la $1-$forme :

$$\alpha = 2x_1x_2^2x_3\mathrm{d}x_1 + 3x_1^2x_3\mathrm{d}x_2 + (x_1^2 + x_2^2)\mathrm{d}x_3.$$

Calculer l'intégrale :

$$\int_{\widehat{\gamma}} \alpha.$$

Exercice 3. Soit $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ le bord du carré de cotés $A = (1, 1)$, $B = (2, 1)$, $C = (2, 2)$, $D = (1, 2)$ parcouru dans le sens direct (voir Figure 1).

Calculer l'intégrale :

$$\int_{\widehat{\gamma}} \sin(x + y)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y.$$

Indication : utiliser la formule de Green-Riemann.

Exercice 4. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie par :

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2\},$$

orientée comme sur la Figure 2.

1) Calculer l'aire de la surface S.

2) Soit α la $2-$forme dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\alpha = (x_1 - x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + (x_2 - x_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + (x_3 - x_1)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1.$$

Soit $S' \subset \mathbb{R}^3$ la surface définie par :

$$S' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ x_3 = 0\}.$$

Montrer sans calculer ces deux intégrales que :

$$\int_S \alpha = \int_{S'} \alpha,$$

si on oriente S' de façon appropriée (indiquer cette orientation).

3) Calculer l'intégrale $\int_S \alpha$.

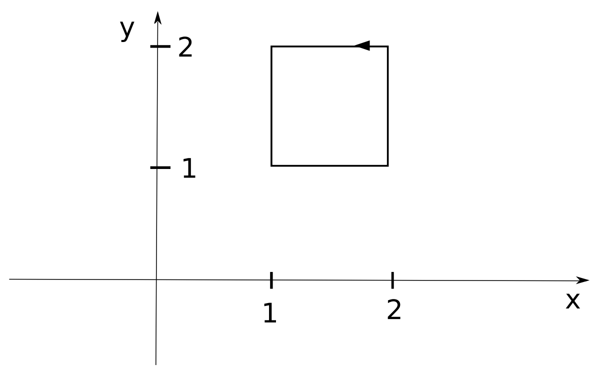

FIGURE 1 – Le carré γ.

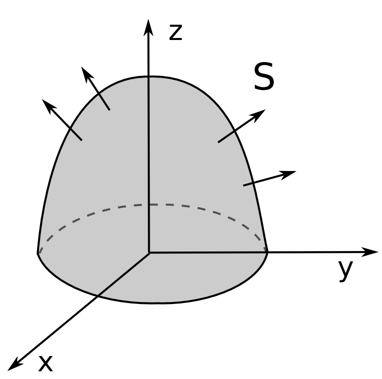

FIGURE 2 – La surface S.