Notes sur les formes différentielles
S3PC Math 255

1 Formes différentielles

1.1 Formes différentielles de degré 0

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ un domaine borné.

Definition 1.1 *Une* forme différentielle de degré 0 *sur D est simplement une fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$.*

On supposera souvent que la fonction f est régulière (infiniment dérivable sur D).

1.2 Formes différentielles de degré 1

Definition 1.2 *Une* forme différentielle de degré 1 *sur D est une expression de la forme :*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\mathrm{d}x_j,$$

où les f_j sont des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$.

On supposera souvent que les fonctions f_j sont régulières (infiniment dérivables sur D).

Exemple 1.3 $\alpha = (x_1^2 + \sin x_2)\mathrm{d}x_1 + \mathrm{e}^{x_1 - x_2}\mathrm{d}x_2$ *est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^2$.*

$\alpha = \cos(x_1x_2x_2)\mathrm{d}x_1 + (x_1^2x_3 - x_2)\mathrm{d}x_2 + \mathrm{tg}(x_2x_3)\mathrm{d}x_3$ *est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^3$.*

Pour le moment il ne faut pas chercher à attacher de signification rigoureuse aux symboles $\mathrm{d}x_j$. Il faut y penser comme à des "éléments d'intégration", un peu comme dans les expressions $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

1.3 Formes différentielles de degré 2

Definition 1.4 *Une* forme différentielle de degré 2 *sur D est une expression de la forme :*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(x) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k,$$

où les f_{jk} sont des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$.

On supposera souvent que les fonctions f_{jk} sont régulières (infiniment dérivables sur D).

Exemple 1.5

$$\alpha = (x_1^2 \cos x_2) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + (x_3 - 2x_1x_2) \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

est une forme différentielle de degré 2 sur $\mathbb{R}^3$.

1.4 Règles de calcul

On applique les règles de calcul suivantes pour les symboles $\mathrm{d}x_i$ et $\wedge$, analogues à celles du produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0, \; 1 \leq i \leq n,$$
$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \; 1 \leq i, j \leq n.$$

On a donc par exemple :

$$\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0, \; \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \; \text{etc.}$$

En appliquant ces règles on peut simplifier les expressions d'une forme. Par exemple si $n = 2$ et α est une forme de degé 2, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha = \; & f_{11}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_{21}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_{22}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
= \; & (f_{12}(x) - f_{21}(x))\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = (f_{21}(x) - f_{12}(x))\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
= \; & g_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,
\end{aligned}$$

pour $g_{12} = f_{12} - f_{21}$. Il suffit d'appliquer mécaniquement les règles $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0$, et $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$.

De même si $n = 3$ et α est une forme de degré 2, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha = \quad & f_{11}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_{13}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
& + f_{21}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_{22}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_{23}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
& + f_{31}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_{32}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_{33}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
= \quad & (f_{12}(x) - f_{21}(x))\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + (f_{23}(x) - f_{32}(x))\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + (f_{31}(x) - f_{13}(x))\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
= \quad & g_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + g_{23}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + g_{31}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3,
\end{aligned}$$

en appliquant les règles :

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_3 = 0,$$

$$\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3, \ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

Remarque 1.6 *Il est utile de prendre l'habitude d'écrire les formes de degré* 2 *en utilisant uniquement les symboles*

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \ \textit{et} \ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1.$$

Les indices de chaque symbole s'obtiennent à partir de ceux du précédent par la permutation circulaire :

$$1 \to 2, \ 2 \to 3, \ 3 \to 1.$$

1.5 Comment comprendre la notion de degré

Le degré d'une forme différentielle correspond à la puissance des "d" qui figurent dans son expression : une forme de degré 0 est une fonction, qui n'a pas de "d" dans son expression. Une forme de degré 1 contient des $\mathrm{d}x_j$, une forme de degré 2 contient des $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$.

Une autre manière de comprendre le degré est la suivante : il est naturel de dire qu'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$ est un espace de dimension 1 (il suffit d'un paramètre pour décrire les points sur la courbe), et q'une surface dans $\mathbb{R}^3$ (un domaine dans $\mathbb{R}^2$) est un espace de dimension 2 (il faut deux paramètres pour décrire les points sur une surface).

Si on suit ce point de vue, un point dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$ est un espace de dimension 0. Si je me donne maintenant une fonction f (une forme de degré 0) , la chose la plus simple que je puisse faire avec c'est d'évaluer sa valeur en un point, ce que je peux comprendre comme "intégrer la fonction f sur un espace de dimension 0".

Les formes de degré 1 sont de même des objets destinés à être intégrées sur des courbes, les formes de degré 2 sont destinées à être intégrées sur des surfaces. En d'autres termes :

une forme différentielle de degré d sera intégrée sur un espace de dimension d.

Une forme différentielle de degré d sera souvent simplement appelée une $d-$*forme.*

1.6 Formes différentielles de degré 3

Passons maintenant aux formes de degré 3. La définition naturelle serait qu'une forme de degré 3 est une expression de la forme :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{ijk}(x) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k,$$

où les f_{ijk} sont des fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Supposons que $n = 2$. En appliquant mécaniquement les règles on voit que

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k = 0, \text{ pour tout triplet } i, j, k.$$

En effet on a forcément une répétition parmi les trois indices i, j, k, et donc par exemple :

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0, \text{ car } \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 = 0.$$

La conclusion est que les formes de degré 3 dans $\mathbb{R}^2$ sont toutes nulles.

C'est aussi évident en considérant l'interprétation du degré donné plus haut : une forme de degré 3 doit être intégrée sur un espace de dimension 3 (un volume), et il n'existe pas de volume dans $\mathbb{R}^2$.

Par contre il existe des formes de degré 3 dans $\mathbb{R}^3$, définies ainsi :

Definition 1.7 *Une forme différentielle de degré* 3 *dans un domaine* $D \subset \mathbb{R}^3$ *est une expression :*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} f_{ijk}(x) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k,$$

où les f_{ijk} *sont des fonctions continues de* D *dans* $\mathbb{R}$.

Si on applique à nouveau les règles de calcul, on voit que $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k = 0$ sauf si les trois indices i, j, k sont distincts. On a aussi :

$$\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \text{ etc},$$

et donc toute forme de degré 3 dans $\mathbb{R}^3$ peut d'écrire sous la forme :

$$\alpha = g_{123}(x) \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3,$$

pour une fonction g_{123}.

2 Intégrale d'une $1-$forme sur d'un arc orienté

Definition 2.1 *Soit $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$ un arc orienté dans $\mathbb{R}^2$,(c'est à dire une courbe dans $\mathbb{R}^2$ munie d'un sens de parcours) et $\alpha = f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2$ une $1-$forme dans $\mathbb{R}^2$. On définit l'intégrale de α le long de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$ de la manière suivante :*

on choisit un paramétrage de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$:

$$[a, b] \ni t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

compatible avec l'orientation de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$. On pose :

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}} \alpha := \int_a^b f_1(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + f_2(x_1(t), x_2(t))x_2'(t)\mathrm{d}t.$$

On peut retenir les règles mnémotechniques suivantes :

1) on écrit

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}} \alpha = \int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}} f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2,$$

2) le long de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$, on remplace $x = (x_1, x_2)$ par $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, et $\mathrm{d}x_i$ par $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$, c'est à dire par $x_i't()\mathrm{d}t$.

3) on intègre l'expression obtenue de a à b.

Remarque 2.2 *On voit que $\int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}} f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2$ est égal à la circulation le long de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$ du champ de vecteurs*

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

On déduit de cette remarque que $\int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}} \alpha$ est indépendant du choix du paramétrage, tant qu'il est compatible avec l'orientation. De plus on a :

$$\int_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}} \alpha = -\int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}} \alpha.$$

On peut aussi définir l'intégrale d'une $1-$forme sur un arc orienté dans $\mathbb{R}^3$. Les arcs orientés dans $\mathbb{R}^3$ sont définis exactement de la même manière que dans $\mathbb{R}^2$: on fixe une fonction :

$$[a, b] \ni t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

de classe C^1. L'ensemble

$$C = \{x(t) |\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^3$$

est une courbe (ou un arc géométrique) tracée dans $\mathbb{R}^3$. Si on choisit un sens de parcours sur C, on obtient un *arc orienté*, noté encore $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$. Un paramétrage $[a,b] \ni t \mapsto x(t)$ est compatible avec l'orentation de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$, si $x(t)$ parcourt $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$ dans le sens de la flèche quand t varie de a à b.

Definition 2.3 *Soit $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$ un arc orienté dans $\mathbb{R}^3$, et $\alpha = f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2 + f_3(x)\mathrm{d}x_3$ une $1-$forme dans $\mathbb{R}^3$. On définit l'intégrale de α le long de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$ de la manière suivante :*

on choisit un paramétrage de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$:

$$[a,b] \ni t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

compatible avec l'orientation de $\overset{\curvearrowright}{\gamma}$. On pose :

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}} \alpha := \int_a^b f_1(x(t))x_1'(t) + f_2(x(t))x_2'(t) + f_3(x(t))x_3'(t)\mathrm{d}t.$$

A nouveau l'inégrale est indépendante du paramétrage, tant qu'il reste compatible avec l'orientation.

3 Intégrale d'une $2-$forme sur une surface

On commence par le cas de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^2$ une surface est simplement un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. On a vu plus haut que dans $\mathbb{R}^2$, une $2-$forme est toujours une expression

$$\alpha = g_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Definition 3.1 *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine de $\mathbb{R}^2$, et $\alpha = g_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ une $2-$forme sur D. On définit l'intégrale de α sur D par :*

$$\int\int_D \alpha := \int\int_D g(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

La règle mnémotechnique est très simple : on remplace simplement $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ par $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$.

Remarque 3.2 *Attention comme $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, le symbole $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1$ devient $-\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ quand on calcule l'intégrale d'une $2-$forme dans $\mathbb{R}^2$.*

Passons maintenant au cas des $2-$formes dans $\mathbb{R}^3$.

Definition 3.3 *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, c'est à dire une surface dans $\mathbb{R}^3$ avec un choix continu d'un vecteur normal unitaire. Soit*

$$\alpha = f_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_{23}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + f_{31}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1$$

une $2-$forme définie dans un voisinage de S. On définit l'intégrale de α sur S de la manière suivante :

1) on choisit un paramétrage de S :

$$\Omega \ni (t, s) \mapsto x(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s)) \in \mathbb{R}^3,$$

Ω étant un domaine de $\mathbb{R}^2$ (domaine des paramètres (t, s)), compatible avec l'orientation de S. On rappelle que ceci signifie que le choix du vecteur normal à S est donné par :

$$\vec{\nu}(t, s) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, s) \wedge \frac{\partial x}{\partial s}(t, s)$$

où ici le symbole $\wedge$ désigne le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

2) on remplace dans l'expression de α :

$$\begin{aligned} f_{ij}(x) &\longrightarrow f_{ij}(x(t, s)), \\ \mathrm{d}x_1 &\longrightarrow \tfrac{\partial x_1}{\partial t}(t, s)\mathrm{d}t + \tfrac{\partial x_1}{\partial t}(t, s)\mathrm{d}s, \\ \mathrm{d}x_2 &\longrightarrow \tfrac{\partial x_2}{\partial t}(t, s)\mathrm{d}t + \tfrac{\partial x_2}{\partial t}(t, s)\mathrm{d}s, \\ \mathrm{d}x_3 &\longrightarrow \tfrac{\partial x_3}{\partial t}(t, s)\mathrm{d}t + \tfrac{\partial x_3}{\partial t}(t, s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

3) on applique les règles de calcul de la sous-section 1.4 à l'expression ainsi obtenue, c'est à dire qu'on utilise

$$\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}t = 0,\ \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}s = 0,\ \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t = -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s.$$

On a donc remplacé α par :

$$F(t, s)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s$$

pour une certaine fonction F.

4) On définit alors :

$$\int\int_S \alpha := \int\int_\Omega F(t, s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

Exemple 3.4 *Donnons quelques exemples de calcul de la fonction $F(t,s)$: Si $\alpha = f(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, on remplace α par :*

$$f(x(t,s))\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t,s)\frac{\partial x_2}{\partial s}(t,s) - \frac{\partial x_2}{\partial t}(t,s)\frac{\partial x_1}{\partial s}(t,s)\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s,$$

Si $\alpha = f(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1$, on remplace α par :

$$f(x(t,s))\left(\frac{\partial x_{13}}{\partial t}(t,s)\frac{\partial x_1}{\partial s}(t,s) - \frac{\partial x_1}{\partial t}(t,s)\frac{\partial x_3}{\partial s}(t,s)\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s,$$

Si $\alpha = f(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, on remplace α par :

$$f(x(t,s))\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}(t,s)\frac{\partial x_3}{\partial s}(t,s) - \frac{\partial x_3}{\partial t}(t,s)\frac{\partial x_2}{\partial s}(t,s)\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}s.$$

4 Intégrale d'une $3-$forme sur un volume

Comme les $3-$formes sont nulles dans $\mathbb{R}^2$, on ne peut intégrer une $3-$forme que sur un domaine (volume) de $\mathbb{R}^3$.

Definition 4.1 *Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine et α une $3-$forme sur D. On a vu que α s'écrit sous la forme :*

$$\alpha = f_{123}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

On pose alors :

$$\int\int\int_D \alpha := \int\int\int_D f_{123}(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

Comme pour l'intégrale d'une $2-$forme dans $\mathbb{R}^2$, la règle est très simple : on remplace simplement le symbole $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ par $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$.

5 Différentielle extérieure

On définit maintenant une opération notée d, qui transforme une forme de degré k en une forme de degré $k+1$. Cette opération, qui est une sorte de dérivation, s'appelle la *différentielle extérieure.*

Une forme différentielle α est dite de classe C^k si les fonctions figurant dans son expression sont de classe C^k.

On commence par le cas des formes de degré 0, c'est à dire des fonctions.

Definition 5.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On pose :*

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x_i.$$

La forme $\mathrm{d}f$ *est donc une forme de dégré* 1*.*

Exemple 5.2 *en dimension* 2*, si* $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2^2)$*, on a :*

$$\mathrm{d}f = x_2^2 \cos(x_1 x_2^2)\mathrm{d}x_1 + 2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2)\mathrm{d}x_2.$$

Pour illustrer comme cette notation est naturelle, montrons l'identité suivante :

$$\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \ !$$

En effet on peux considérer le symbole x_j comme représentant la fonction

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ (x_1, \ldots, x_n) \to x_j, \end{array}$$

de même que sur $\mathbb{R}$ on note par x la fonction $x \to x$. Si on calcule les dérivées partielles de cette fonction f, on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}x_j, \text{ c'est à dire } \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j.$$

Passons maintenant aux formes de degré 1.

Definition 5.3 *Soit*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\mathrm{d}x_i$$

une forme de degré 1 *supposée de classe* C^1 *(c'est à dire que les fonctions* f_i *sont de classe* C^1*). On pose alors :*

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x_i,$$

qui est une forme de degré 2*.*

Exemple 5.4 *si* $n = 2$ *et :*

$$\alpha = f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2,$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha = &\ \tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &+ \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \tfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ = &\ \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,\end{aligned}$$

en appliquant les règles de calcul.

Exemple 5.5 *si* $n = 3$ *et :*

$$\alpha = f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2 + f_3(x)\mathrm{d}x_3,$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha = &\ \tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &+ \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \tfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &+ \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \tfrac{\partial f_3}{\partial x_3}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ = &\ \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &+ \left(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &+ \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x)\right)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

Il est absolument inutile (et même fortement déconseillé) de retenir ces formules par coeur, il suffit de savoir appliquer les règles de calcul.

Regardons finalement le cas des formes de degré 2.

Definition 5.6 *Soit*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

une forme de degré 2 *supposée de classe* C^1 *(c'est à dire que les fonctions* f_{ij} *sont de classe* C^1*). On pose alors :*

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}f_{ij} \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j,$$

qui est une forme de degré 3.

Comme toutes les formes de degré 3 dans $\mathbb{R}^2$ sont nulles on a :

Lemme 5.7 *Dans $\mathbb{R}^2$ on a :*

$$\mathrm{d}\alpha = 0 \textit{ si } \alpha \textit{ est une forme de degré } 2.$$

En dimension 3, l'application mécanique des règles de calcul donne le résultat suivant :

si

$$\alpha = f_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_{23}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + f_{31}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1,$$

alors

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3}(x)\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

A nouveau ne pas retenir cette formule.

6 Formules de Green-Riemann pour les $0-$formes

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, $n = 2, 3$, et $\overset{\frown}{\gamma}$ un arc orienté. Quand le paramètre t parcourt $[a, b]$, le point $x(t)$ parcourt $\overset{\frown}{\gamma}$ de A vers B (voir Fig. 1). Si

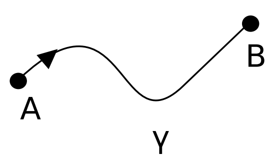

FIGURE 1 – l'arc orienté $\overset{\frown}{\gamma}$

on calcule la $1-$forme $\mathrm{d}f$, on obtient :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\frown}{\gamma}} \mathrm{d}f &= \int_a^b \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x(t))x_1'(t) + \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x(t))x_2'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t))\mathrm{d}t = f(x(b)) - f(x(a)) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Ceci n'est pas surprenant car $\int_{\overset{\frown}{\gamma}} \mathrm{d}f$ est égal à la circulation du champ de vecteurs $\vec{\nabla}_x f$ le long de $\overset{\frown}{\gamma}$ et donc à la variation de f entre B et A.

Le même résultat est vrai dans $\mathbb{R}^3$. On a donc :

Théorème 6.1 (Formule de Green-Riemann pour les 0-formes) *Soit $\overset{\frown}{\gamma} = \overset{\frown}{AB}$ un arc orienté dans $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ et f une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overset{\frown}{\gamma}$. Alors :*

$$\int_{\overset{\frown}{\gamma}} \mathrm{d}f = f(B) - f(A).$$

La version de ce théorème exprimée à l'aide des champs de vecteurs est :

$$\mathrm{Circ}(\vec{\nabla} f, \overset{\frown}{AB}) = f(B) - f(A),$$

pour A, B deux points dans $\mathbb{R}^n$ et $\overset{\frown}{AB}$ un arc orienté allant de A à B.

7 Formule de Green-Riemann pour les $1-$formes

7.1 Le cas dans $\mathbb{R}^2$

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné et ∂D son *bord*, qui est une courbe fermée.

On suppose le bord *orienté par D*, c'est à dire que quand on parcourt ∂D dans le sens de la flèche, le domaine D reste *à gauche.* (voir Fig. 2). Il peut arriver que

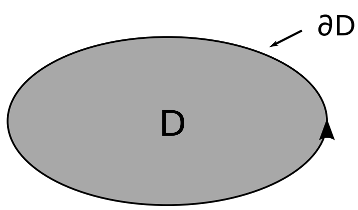

FIGURE 2 – le domaine D et son bord orienté ∂D

le domaine D ait des trous, dans ce cas le bord de D est la réunion de plusieurs courbes fermées. On applique alors la même convention pour orienter chaque courbe (voir Fig. 3).

Théorème 7.1 (Formule de Green-Riemann pour les $1-$formes) *Soit α une $1-$forme de classe C^1 définie au voisinage du domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. On a :*

$$\int_{\partial D} \alpha = \int \int_D \mathrm{d}\alpha.$$

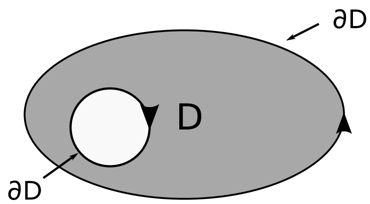

FIGURE 3 – le domaine D et son bord orienté ∂D

De manière plus concrète :

$$\int_{\partial D} f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2 = \int\int_D \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

ou encore :

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q(x)\mathrm{d}y = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

7.2 Le cas $n = 3$

Regardons maintenant le cas $n = 3$. On se donne une surface orientée S dans $\mathbb{R}^3$. Le bord ∂S de S est une courbe fermée. On oriente ∂S de manière compatible avec l'orientation de S (voir Fig. 4.) On se donne une $1-$forme α de classe C^1 définie au voisinage de S.

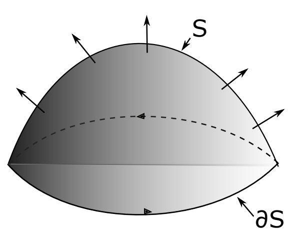

FIGURE 4 – la surface S et son bord orienté ∂S

Théorème 7.2 (Formule de Green-Riemann pour les $1-$formes) *Soit α une $1-$forme de classe C^1 définie au voisinage de la surface $S \subset \mathbb{R}^3$. On a :*

$$\int_{\partial S} \alpha = \int\int_S \mathrm{d}\alpha.$$

8 Formules de Green pour les $2-$formes

On se place en dimension 3. Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un domaine (volume) borné. Son bord ∂D est une surface fermée. On suppose que ∂D est *orienté* par D, c'est à dire que le vecteur normal en un point de ∂D pointe vers *l'extérieur* de D (voir Fig. 5).

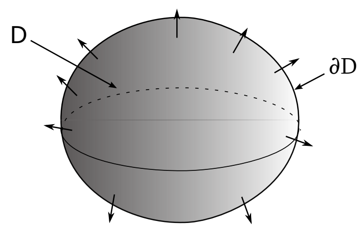

FIGURE 5 – le domaine D et son bord orienté ∂D

Théorème 8.1 (Formule de Green-Riemann pour les $2-$formes) *Soit α une $2-$forme de classe C^1 définie au voisinage du domaine $D \subset \mathbb{R}^3$. On a :*

$$\int_{\partial D} \alpha = \int\int_{D} \mathrm{d}\alpha.$$

9 Formules de Green-Riemann dans le language des champs de vecteurs

9.1 Identifications

On suppose dans cette section que $n = 3$. On fixe les identifications suivantes :
- on identifie une $0-$forme (une fonction) avec elle même.
- on identifie une $1-$forme

$$\alpha = f_1(x)\mathrm{d}x_1 + f_2(x)\mathrm{d}x_2 + f_3(x)\mathrm{d}x_3,$$

avec le champ de vecteurs :

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

- on identifie une $2-$forme :

$$\alpha = f_{12}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_{23}(x)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + f_{31}(x)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1,$$

avec le champ de vecteurs :

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} f_{23}(x) \\ f_{31}(x) \\ f_{12}(x) \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

- on identifie une $3-$forme :

$$\alpha = f_{123}(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

avec la fonction

$$x \to f_{123}(x). \tag{9.3}$$

9.2 Divergence et rotationnel

Sur les champs de vecteurs il existe deux opérations naturelles, la *divergence* et le *rotationnel*. Si

$$x \mapsto \vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix}$$

est un champ de vecteurs de classe C^1, la *divergence* de $\vec{v}$ est donnée par :

$$\mathrm{div}\vec{v}(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x),$$

qui est une fonction $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On utilise aussi souvent la notation naturelle

$$\mathrm{div}\vec{v} =: \nabla \cdot \vec{v},$$

où il faut comprendre le symbole ∇ comme le 'vecteur' d'opérateurs de dérivées partielles :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Le *rotationnel* de $\vec{v}$ est donné par :

$$\mathrm{rot}\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix},$$

qui est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Le notation naturelle correspondante est :

$$\mathrm{rot}\vec{v} =: \nabla \wedge \vec{v},$$

ou le symbole $\wedge$ désigne ici le produit vectoriel des deux vecteurs ∇ et $\vec{v}$.

On vérifie alors facilement les propriétés suivantes :

Proposition 9.1 *1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors le champ de vecteurs associé à la $1-$forme $\mathrm{d}f$ par (9.1) est égal à ∇f.*

2. Soit α est une $1-$forme de classe C^1 et $\vec{v}$ le champ de vecteurs associé à α par (9.1). Alors le champ de vecteurs associé à la $2-$forme $\mathrm{d}\alpha$ par (9.2) est égal à $\mathrm{rot}\vec{v}$.

3. Soit α une $2-$forme de classe C^1 et $\vec{v}$ le champ de vecteurs associé à α par (9.2). Alors la fonction associée à la $3-$forme $\mathrm{d}\alpha$ par (9.3) est égale à $\mathrm{div}\vec{v}$.

On obtient alors les versions suivantes des formules de Green-Riemann :

Proposition 9.2 *Soit S une surface orientée dans $\mathbb{R}^3$ et ∂S son bord orienté par S. Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs de classe C^1. Alors on a*

$$\mathrm{Circ}(\vec{v}, \mathrm{d}S) = \int\int_S \mathrm{rot}\vec{v} \cdot \vec{\nu} \mathrm{d}^2 S,$$

où $\vec{\nu}$ est le champ de vecteurs normal unitaire à S.

Une intégrale :

$$\int\int_S \vec{w} \cdot \vec{\nu} d^2 S$$

où $\vec{w}$ est un champ de vecteurs s'appelle le *flux* du champ de vecteurs $\vec{w}$ à travers la surface (orientée) S.

Proposition 9.3 *Soit D un volume dans $\mathbb{R}^3$ et ∂D le bord de D, orienté par D. Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs de classe C^1. Alors on a :*

$$\int\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{\nu} d^2 S = \int\int\int_D \mathrm{div}\vec{v} d^3 x.$$