Examen de Mathématiques (S3PC) n° 1

Durée 2 heures. Documents et calculatrices interdits

Le 30 octobre 2007.

barême indicatif: 3 ;4 ;6 ;7

Exercice 1. Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{R}$ l'application linéaire $T_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de matrice

$$\begin{bmatrix} 2a & -a & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 3 & 2a & a^2 \end{bmatrix}$$

est bijective.

Exercice 2. Soit $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer une base de l'image de T et du noyau de T.

Exercice 3. Soit $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est elle diagonalisable ?

2) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel et $N = A - \lambda \mathbf{1}_3$. Montrer que si $N^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}N$ est inclus dans $\mathrm{Ker}N$. En déduire que si $N^2 = 0$ alors λ est une valeur propre de A.

Montrer que si $N^3 = 0$ alors $\mathrm{Im}N^2$ est inclus dans $\mathrm{Ker}N$. En déduire que si $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$ alors λ est une valeur propre de A.

En utilisant ce qui précède, trouver pour quelles valeurs de λ on a $N^3 = 0$.

3) On fixe λ égal au réel déterminé en 2). Trouver une base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ tels que

$$Nv_1 = v_2, \quad Nv_2 = v_3.$$

Quelle est la valeur de Nv_3 ?

Exercice 4. On considère les systèmes différentiels :

$$(S_0) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + \mathrm{e}^{2t} \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

1) Déterminer la solution générale de (S_0).

2) Déterminer une solution particulière $(y_1(t), y_2(t))$ de (S).

Indication : chercher cette solution sous la forme $(a_1 e^{2t}, a_2 e^{2t})$ *pour des constantes* a_1, a_2 *à déterminer.*

3) Montrer que si $(x_1(t), x_2(t))$ est une solution arbitraire de (S), alors $(z_1(t), z_2(t)) = (x_1(t) - y_1(t), x_2(t) - y_2(t))$ où $(y_1(t), y_2(t))$ est la solution trouvée en 1) est une solution de (S_0).

En déduire la solution générale de (S).

4) En utilisant le résultat de 2), déterminer la solution $(x_1(t), x_2(t))$ de (S) avec les conditions initiales :

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$