Examen de Mathématiques (S3PC) n° 1

Durée 2 heures. Documents et calculatrices interdits

Le 28 Octobre 2008.

barême indicatif: 4 ; 6 ; 5 ; 5.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Déterminer ses points critiques et donner leur nature (maximum, minimum, ou point selle).

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

$$f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4.$$

1) Déterminer ses points critiques et donner la nature des extrémums différents du point $(0, 0)$.

2) le calcul de la matrice des dérivées secondes de f en $(0, 0)$ permet-il de conclure sur la nature du point critique $(0, 0)$?

3) Montrer que pour tout $t \neq 0$ on a

$$f(t, t) > f(0, 0),$$

et que pour tout $t \neq 0$ assez petit on a :

$$f(t, 0) < f(0, 0).$$

Que peut on en conclure sur la nature du point critique $(0, 0)$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f admet des dérivées partielles sur $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ et les calculer.

2) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.

Indication : on calculera les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ en revenant à la définition de la dérivée, c'est à dire en calculant :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$
$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

3) La fonction f est elle de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

Indication : on pourra calculer la limite de $\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y)$ quand le point (x, y) tend vers le point $(0, 0)$ en restant sur la droite d'équation $y = x$.

Exercice 4. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est elle diagonalisable ?

2) Déterminer les vecteurs propres de A.